

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO DA AÇÃO DE ONDAS E INFLUENCIA DA
FUNDAÇÃO EM UMA ESTRUTURAS OFFSHORE “*MONO-
LEG*”**

JONAS YAMASHITA DE FARIAS

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO
MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ESTRUTURA**

BRASÍLIA, JULHO- 2018

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO DA AÇÃO DE ONDAS E INFLUENCIA DA
FUNDAÇÃO EM UMA ESTRUTURAS OFFSHORE “*MONO-
LEG*”**

JONAS YAMASHITA DE FARIAS

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Lineu José Pedroso, Dr.
(Orientador)

Prof. Francisco Evangelista Junior, Dr
(Examinador interno)

Prof. Dirceu Silveira, Dr.
(Examinador interno)

BRASÍLIA/DF, julho de 2018.

FICHA CATALOGRÁFICA

FARIAS, JONAS YAMASHITA

**UM ESTUDO DA AÇÃO DE ONDAS E INFLUENCIA DA FUNDAÇÃO
EM UMA ESTRUTURAS OFFSHORE “*MONO-LEG*”.**[Distrito Federal]
2018.

xiv, 94 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2018)
Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Plataforma Offshore

2. Teoria de Ondas

3. Dinâmica

4. Fluido-Estrutura

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FARIAS, J. Y. (2018). Um estudo das ações de ondas em estruturas offshore. Monografia de Projeto Final, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 94 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Jonas Yamashita de Farias

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Um estudo das ações de ondas em estruturas offshore

GRAU/ANO: Bacharel em Engenharia Civil

ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Jonas Yamashita de Farias
SQN 115 Bloco J, Apartamento 305

CEP: 70772-100 Brasília – DF – Brasil

*“Somos feitos de carne, mas temos que
viver como se fôssemos de ferro” S. Freud*

AGRADECIMENTOS

Foi uma pesquisa árdua e duradoura, bem como o resto da graduação em si, e seria tanto injusto quanto insatisfatório não poder dar meus agradecimentos e um singelo token da minha apreciação para os muitos especiais que fizeram a diferença deixando suas marcas ao longo dessa jornada.

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu professor orientador Lineu José Pedroso por sua enorme paciência desde os tempos da iniciação científica e sua tutoria essencial para a concepção dessa monografia.

Não menos importante, gostaria de agradecer também aos meus pais pelo amor, paciência e por servirem de exemplos e que sem eles nada disso teria sido possível.

Gostaria de agradecer aos meus colegas da 97^a turma de engenharia civil da UnB que não só marcaram uma fase inesquecível da minha vida e me ajudaram a não perder o referencial nas fases mais demandantes do curso.

Gostaria de agradecer aos meus amigos da *Ohana*, por me darem a determinação e a sanidade para prosseguir com esse trabalho e me ensinarem o verdadeiro potencial que a vida tem dada boas companhias.

Gostaria de agradecer ao Francisco Alva pelo auxílio na utilização das ferramentas computacionais para a análise numérico.

RESUMO

Com o aumento da demanda pela exploração de combustíveis fósseis em águas cada vez mais profundas, cresce também a necessidade de tecnologia e estudos aplicados à engenharia petrolífera. O desafio se encontra na natureza aparentemente randômica e das magnitudes das forças envolvidas. Nesse contexto essa monografia mostra uma breve revisão dos principais tipos de solicitação mais comuns ao longo da vida útil da plataforma, como esses são considerados para o cálculo estrutural simplificado e as teorias que regem cada um desses fenômenos. A base teórica se fundamenta na teoria da onda de Airy, no cálculo de esforços propostos por Morrison, e na teoria estrutural de análise modal. Como um estudo de caso é feita a análise dinâmica de uma plataforma fixa auto elevatória, utilizando a análise modal para a obtenção de seus deslocamento e frequências naturais. Com este estudo de caso, espera-se esclarecer os fundamentos descritos durante a revisão bibliográfica, ilustrando de maneira mais clara os fenômenos estudados.

Palavras-chave: Plataforma offshore, Dinâmica, Teoria de Ondas, Fluido-estrutura

ABSTRACT

The increasing demand for the exploration of deep fossil fuels, prompts the necessity for more technology and studies applied to oil engineering. The challenge lies in the random nature and magnitudes of the forces involved. In this context, this monograph presents a brief revision of the most common types of forces acting during the design life of the platform, how these forces are considered in a simplified structural calculation and some theories that related to these phenomena. The theoretical background is based on Airy's wave theory, the computation of forces proposed by Morrison, and the structural theory of modal analysis. Finally, a case study is presented, considering a dynamic analysis of a fixed self-elevating platform using modal analysis to compute its displacement and natural frequencies. The aim of this case study is to reinforce the fundamentals described during the literature review and to illustrate more clearly the phenomena studied.

Key words: platform offshore, dynamics, wave theory, fluid-structure

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA.....	1
1.2. IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA	2
1.3. DEFINIÇÃO DA HIPÓTESE.....	2
1.4. OBJETIVOS.....	2
1.5. METODOLOGIA	3
1.6. ESTRUTURA DO TRABALHO	4
 2. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	 6
2.1. Classificação de plataformas de petróleo.	6
2.1.1. Plataformas Fixas	7
2.1.2. Plataformas flutuantes	8
2.2. Teoria linear de Airy	10
2.2.1. Equação de Bernoulli	13
2.2.2. Condições Iniciais e Condições de Contorno	13
2.2.3. Resolução Geral do Problema Simplificado.....	16
2.2.4. Características do escoamento.....	17
2.2.5. Determinação das velocidades e acelerações	20
2.2.6. Deslocamento das partículas d'água	20
2.3. Forças na Estrutura - Formulação de Morrison.....	23
2.3.1. Coeficientes das forças hidrodinâmicas	24
2.3.2. Forças totais na estrutura	25
2.4. Dinâmica das estruturas	26
2.4.1. Sistema com um Grau de Liberdade (SUGL)	26

2.4.1.1. Amortecimento subcrítico	28
2.4.1.2. Amortecimento crítico	28
2.4.1.3. Amortecimento supercrítico	29
2.4.1.4. Decaimento logarítmico.....	29
2.4.2. Vibração forçada	30
2.4.2.1. Caso não-amortecido	31
2.4.2.2. Caso amortecido	33
2.4.3. Sistema com múltiplos graus de liberdade.	36
2.4.3.1. Análise Modal.....	38
3. ASPECTOS COMPUTACIONAIS	41
3.1. MAPLE	41
3.2. ABAQUS/CAE	42
4. ESTUDO DE CASO.....	45
4.1. Cálculo dos campos cinemáticos.....	46
4.2. Cálculo das forças atuantes na estrutura.	48
4.3. Massa de água adicional.....	50
4.4. Comportamento dinâmico do tubo engastado.	51
4.5. Caso com fundação.	58
4.5.1. Critério de segurança contra o deslizamento.....	59
4.5.2. Critério de segurança contra o tombamento	60
4.5.3. Critério da sustentação vertical;	60
4.6. Convergência do domínio.	60
4.7. Iteração solo estrutura	62
4.8. Estudo da influência do solo	63
4.8.1. Modos de vibração	66

5. CONCLUSÃO	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
Tabela 2-1. Estimativa do valor do coeficiente de massa C_M . em função do número de Reynolds	25
Tabela 4-1-Modos encontrados analiticamente e numericamente	54
Tabela 4-2 .Frequências acopladas e frequências naturais do solo.	66

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
Figura 1.1 – Estrutura metodológica da pesquisa	3
Figura 2.1 - Exemplo de plataforma do tipo auto elevatória. Fonte: ISI Engenharia (2011).....	8
Figura 2.2 - Exemplo de plataforma do tipo jaqueta. Fonte: ISI Engenharia (2011).....	8
Figura 2.3 - Diferentes tipos de plataformas e seus mecanismos de fixação. Fonte: ISI Engenharia (2011)	9
Figura 2.4– Exemplo de uma plataforma semissubmersível e do tipo SPAR. Fonte: ISI Engenharia (2011)	10
Figura 2.5 - Parâmetros do movimento ondulatório. Fonte: Pedroso (1982).....	17
Figura 2.6 – Aplicabilidade da teoria linear de Airy. Fonte: Martinez (2017)	19
Figura 2.7 - Trajetória das partículas d’agua para altas profundidade. Fonte: autor desconhecido	22
Figura 2.8 – Trajetória das partículas d’agua para baixas profundidades. Fonte: autor desconhecido	22
Figura 2.9 – Decaimento do raio de trajetória. Fonte: Silva (2009).....	22
Figura 2.10 – Variação do coeficiente de Arraste, com o Número de Reynolds. Fonte :PEDROSO,1982.....	24
Figura 2.11 - Modelo massa-mola amortecido.Chakbarti,2011	26
Figura 2.12 – Fator de amplificação dinâmico FAD versus fator de frequência β	33
Figura 2.13 – Fator de aplicação dinâmica em função dessa razão de amplitudes. Fonte: Ferreira (2012)	36
Figura 4.1 -Modelo tubo engastado.....	45
Figura 4.2- Curvas de equipotenciais de velocidade.....	47
Figura 4.3- Campo dos vetores velocidade para $t=0$, ao longo de um comprimento de onda. 47	
Figura 4.4- Campo dos vetores velocidade para $t=0$, ao longo de um comprimento de onda. 48	
Figura 4.5- Distribuição das forças de arraste e inercial, respectivamente, ao longo do tubo .49	
Figura 4.6- Comportamento das forças de arraste e inercial, respectivamente, ao longo do tempo:.....	49
Figura 4.7- Forças aplicada por seção do tubo	50
Figura 4.8- Tubo deformado devido ao carregamento das onda.....	52

Figura 4.9- Deslocamento no topo do tubo ao longo do tempo e seus valores	52
Figura 4.10- Modelo analítico utilizado	53
Figura 4.11- Deslocamento calculado utilizando da superposição modal	54
Figura 4.12-Primeiro modo	55
Figura 4.13- Segundo modo.	55
Figura 4.14- Terceiro modo	56
Figura 4.15- Quarto modo	56
Figura 4.16- Quinto modo	56
Figura 4.17- Sexto Modo,	56
Figura 4.18- Análise Steady State Dynamics pelo ABAQUS.	57
Figura 4.19— Análise Steady State Dynamics no Excel.....	57
Figura 4.20- Diagrama de corpo livre do tubo.	59
Figura 4.21-Ponto onde foi medido o deslocamento.....	61
Figura 4.22- Deslocamento x Raio do domínio	62
Figura 4.23- Iteração representada segundo ABAQUS.	63
Figura 4.24- Ordem dos deslocamentos no modelo tubo-solo.....	64
Figura 4.25- Deslocamento no topo do tubo ao longo do tempo e seus valores	64
Figura 4.26- Relação entre o modulo de elasticidade do solo e o deslocamento máximo.....	65
Figura 4.27-- Relação entre o modulo de elasticidade do solo e o deslocamento na base.....	66
Figura 4.28- Primeiro modo.	67
Figura 4.29- Segundo Modo.....	67
Figura 4.30- Terceiro modo	67
Figura 4.31- Quarto modo	67
Figura 4.32- Quinto modo.....	68
Figura 4.33-Sexto modo.	68
Figura 4.34-Setimo modo.....	68
Figura 4.35- Oitavo modo	68
Figura 4.36- Nono modo	68
Figura 4.37-Décimo modo	68
Figura 4.38- Análise Steady State Dynamics no ABAQUS.	69
Figura 4.39- Análise Steady State Dynamics no Excel.....	69

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
\vec{V}	Vetor velocidade do escoamento.
Φ	Função potencial de velocidade.
u	Componente da velocidade no sentido do eixo x.
v	Componente da velocidade no sentido do eixo y.
z	Componente da velocidade no sentido do eixo z.
η	Função que descreve a superfície livre da onda.
S	Função verificadora de superfície .
A	Amplitude da onda.
k	Número de onda.
T	Período de onda.
t	Variável tempo.
ω	Frequência angular.
ω_n	Frequência natural.
ω_d	Frequência natural amortecida.
C	Celeridade de onda.
h	Profundidade oceânica.
Q	Constante de Bernoulli.
p	Pressão .
g	Gravidade.
ρ	Densidade.
\dot{u}	Componente da velocidade no sentido do eixo x.
\dot{v}	Componente da velocidade no sentido do eixo y.
η	Função da superfície livre.
ϕ	Bitola da barra em milímetros.
L	Comprimento de onda.

D	Diâmetro da haste.
C_m, C_d	Coefficiente de Morrison.
f_i, f_d	Forças de Morrison.
f	Força horizontal atuante na estrutura.
Re	Número de Reynolds.
m	Massa.
c	Amortecimento.
k	Rigidez da mola.
ξ	Fator de amortecimento.
s_1, s_2	Soluções genéricas para equação diferencial.
FAD	Fator de Amplificação Dinâmica.
ζ	Decaimento logarítmico.
α	Deflexão angular, parâmetros de Rayleigh.
q	Coordenadas Modais.
ϕ	Modos de Vibração.
β	Razão de frequência, parâmetro de Rayleigh.

1. INTRODUÇÃO

A atual demanda global de petróleo vem crescendo a cada dia chegando, em 2017, à marca histórica de 100 milhões de barris por dia, segundo a AIE-Agência Internacional de Energia (Petronotícias - 2018). Essa exigência mundial fez subir ainda mais a necessidade da exploração de petróleo em altas profundidades, dada a natureza não renovável do combustível, principalmente no ambiente oceânico, colocando esse tipo de pesquisa e tecnologia como uma importante fronteira do conhecimento.

O Brasil possui um futuro promissor com a recente descoberta do pré-sal, área compreendida por uma faixa que se estende ao longo de 800 quilômetros de comprimento e 200 quilômetros de largura entre os estados de Santa Catarina e Espírito Santo. Essa reserva se encontra a cerca de 7 mil metros de profundidade e sua contribuição na atual conjuntura energética brasileira já ultrapassou a de petróleos retirados de poços do pós-sal (Tassinari *et all*, 2012).

A principal empresa responsável pela extração e refinamento do petróleo no Brasil é a Petrobras. Essa multinacional opera em 25 países e possui cerca de 111 plataformas de exploração petrolíferas, algumas dessas verdadeiras cidades flutuantes abrigando centenas de trabalhadores (Petrobras, 2018).

A importância ambiental desse tipo de obra gera preocupações inerentes sobre a segurança estrutural desses tipos de estruturas, que além de possuírem enormes dificuldades construtivas e portes gigantescos, devem resistir também a grandes esforços devido às ondas, sismos e outras solicitações comuns no cotidiano da plataforma. Além disso, as dificuldades da formulação de um modelo matemático que represente adequadamente a realidade caótica marítima também se encontra como uma grande problemática do estudo hidromecânico desse tipo de obras.

1.1. MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Com base na enorme quantidade de concreto e aço utilizados nas plataformas de petróleo, a engenharia petrolífera vem buscando cada vez mais desenvolver métodos e tecnologias aplicadas que resultem em economia nesse tipo de estrutura. Essa economia geralmente vem acompanhada do aumento da preocupação relacionada a problemas dinâmicos da estrutura,

tendo em vista que a esbeltez e flexibilidade nesse tipo de obra a torna mais suscetível a esse tipo de problema.

O problema é de natureza transiente e dinâmica e sua análise deve ser feita como tal. Sabendo disso, será realizado um estudo sobre os modos de vibrações e frequências naturais nesse tipo de estrutura afim de compreender o seu comportamento dinâmico.

É também relevante compreender a variabilidade das solicitações em estruturas *offshore* e como considerá-las conforme as atuais normas técnicas para o dimensionamento dessas construções.

Portanto, segundo esse aumento da demanda e da necessidade de novas tecnologias auxiliares para a exploração de petróleo e gás em águas profundas é que se encontra a motivação para esse trabalho e insere-se esse estudo como contribuição a essa temática.

1.2. IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA

Dentro do contexto apresentando na seção anterior, pode se identificar o problema por meio da seguinte pergunta: Como as diversas solicitações atuantes no corpo da estrutura impactam no comportamento dinâmico de uma plataforma offshore de petróleo?

1.3. DEFINIÇÃO DA HIPÓTESE

Na tentativa de responder a perguntar da seção 1.2 partiu-se da seguinte hipótese de que “O cálculo das respostas hidromecânicas em uma estrutura de uma plataforma offshore de petróleo pode ser adequadamente alcançado com base nas equações propostas por Morrison e utilizando como entrada os parâmetros rescritos pela teoria linear de ondas de Airy.

1.4. OBJETIVOS

A partir da hipótese assumida na seção 1.3, esse estudo tem como objetivo:

Cálculo da resposta dinâmica da estrutura a partir das solicitações mais frequentes de uma plataforma offshore de petróleo.

Como objetivos específicos têm-se:

- A compreensão da fenomenologia envolvendo o movimento de ondas com o auxílio das teorias de ondas de Airy.
- O entendimento da resposta estrutural desse tipo de construção quando submetido às perturbações ondulatórias com o auxílio da formulação de Morrison.
- Estudo do comportamento dinâmico, envolvendo as frequências naturais e seus respectivos modos de deformações e suas relações com do fenômeno de ressonância e a deformação total da estrutura ao longo do tempo.

1.5. METODOLOGIA

Para atingir os objetivos definidos pela hipótese, definiu-se as seguintes etapas de trabalho conforme a Figura 1.1.

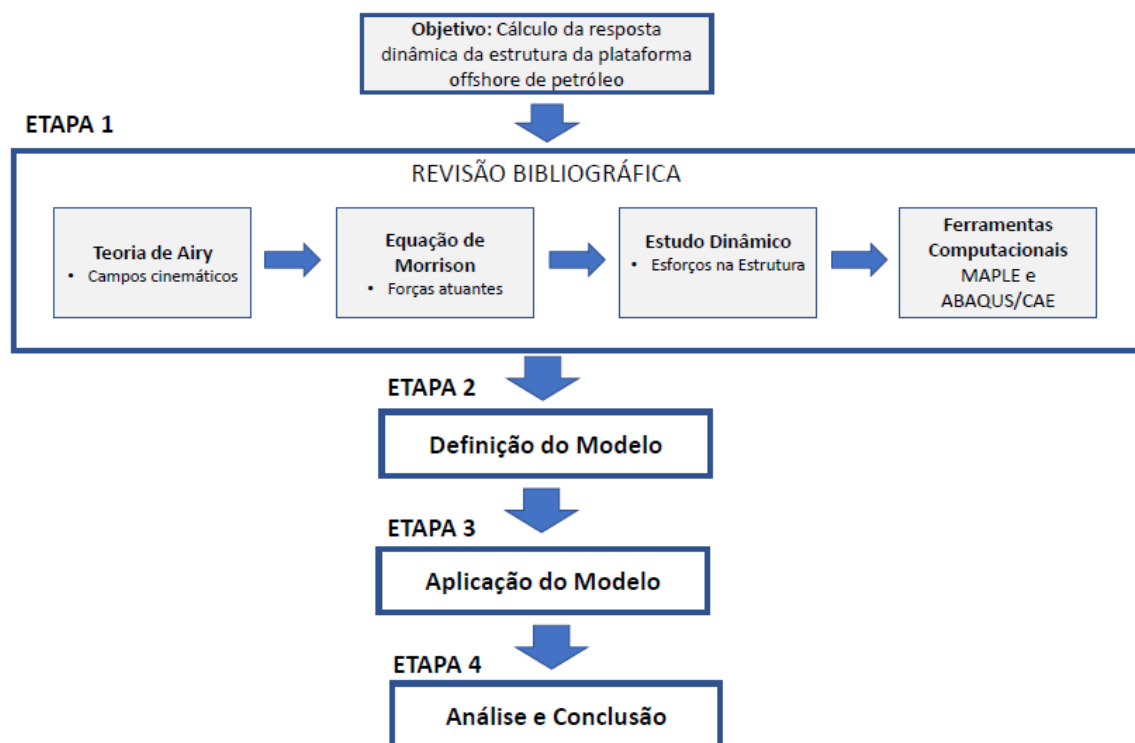


Figura 1.1 – Estrutura metodológica da pesquisa

Nesse trabalho serão estudados o comportamento e a resposta mecânica de uma haste de plataforma de petróleo fixa auto elevatória submetida à ações de ondas descritas pelas Equação de Morrison e cujo comportamento cinemático seja representado pela teoria linear de Airy.

Com essa finalidade, um modelo numérico será construído e analisado com auxílio de ferramentas computacionais, como MAPLE e ABAQUS/CAE, e a partir deste poderemos descrever a influência das ondas e também da fundação granular na estrutura. O trabalho será estruturado nas seguintes etapas:

Etapa 1- revisão bibliográfica para fornecer o entendimento do objeto de estudo, neste caso plataforma *offshore* de petróleo, as teorias e equações que regem os comportamentos das solicitações como a Teoria de Airy e Equações de Morrison, resultados dinâmicos e a compreensão das variáveis atuantes no cálculo do resultado dinâmico.

Etapa 2- com base no entendimento da revisão bibliográfica, o modelo será definido para o cálculo do resultado dinâmico de uma estrutura simplificada da plataforma *offshore* de petróleo.

Etapa 3- uma vez definido o modelo, será realizada uma aplicação para verificar se as premissas adotadas são válidas;

Etapa 4- as análises dos resultados serão realizadas aplicando técnicas que permitem identificar a sua validade.

1.6. ESTRUTURA DO TRABALHO

O estudo apresenta 5 capítulos, onde este capítulo possui caráter introdutório, e nele é apresentada uma breve contextualização do problema estudado, da hipótese adotada, assim como os seus objetivos, os motivos e a metodologia que justificam o estudo do comportamento dinâmico das plataformas de petróleo.

O capítulo 2 tem como objetivo apresentar um entendimento do objeto de estudo, neste caso, uma plataforma *offshore*, por meio de uma revisão bibliográfica onde se inicia com as bases teóricas que sustentam o comportamento do fenômeno. Uma vez entendidas as teorias de base, as formulações matemáticas são apresentadas para compreender a representação do fenômeno. Finalmente, com as formulações matemáticas são apresentadas as resoluções dos problemas simplificados. É realizado nesse capítulo também um desenvolvimento metodológico para o cálculo da resposta dinâmica da estrutura da plataforma offshore de petróleo,

No capítulo 3 é feita uma pequena introdução ao funcionamento dos softwares computacionais utilizados.

No capítulo 4 é apresentado um estudo de caso utilizando o auxílio computacional do *software MAPLE*, juntamente com uma modelagem numérica utilizando o ABAQUS afim de consolidar a teoria apresentada no capítulo dois, elucidando o problema por meio de ilustrações e gráficos e comparando os resultados obtidos pelos dois modelos.

O capítulo 5, finaliza com uma breve conclusão do estudo verificando se os objetivos e as premissas foram atendidos, como também apresentando os pontos fracos e as sugestões para futuras pesquisas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO

No presente capítulo é descrita, de maneira sintética, a revisão bibliográfica necessária para o entendimento do fenômeno enunciado. A sua primeira seção discute as diferentes classificações das plataformas *offshore*, suas individualidades e seus diferentes mecanismos de funcionamento. A seção 2.2 introduz a teoria linear de onda, suas hipóteses iniciais além de todo o arcabouço matemático necessário para a resolução da equação de Laplace para o escoamento potencial, chegando finalmente às principais características do movimento oscilatório da onda e a determinação de suas componentes dinâmicas como as velocidades e acelerações durante o escoamento.

Posteriormente, na seção 2.3 é apresentada a dedução dessas componentes dinâmicas, em termos de forças atuantes na estrutura por meio da formulação de Morrison, juntamente com as considerações adotadas por ele para a validação de suas teorias.

Na seção 2.4 é realizada uma revisão sobre dinâmica e vibrações partindo do movimento oscilatório livre com um grau de liberdade, seguindo para o caso com amortecimento e os possíveis domínios para esse tipo de movimento, prosseguindo com o caso da vibração forçada e vários graus de liberdade. É dada também uma pequena introdução ao estudo dos efeitos dinâmicos gerados por sismos, e como é feita sua consideração usando como base as equações de movimentos oscilatórios, concluindo assim a revisão bibliográfica.

2.1. Classificação de plataformas de petróleo.

O conhecimento das diferentes tipologias das plataformas de petróleo possui uma enorme importância, pois é a partir dela que se deve construir o modelo estudado de maneira que esse se adeque melhor ao tipo de funcionamento do sistema, tem também um interesse especial para a engenharia petrolífera pois a partir dos mecanismos de funcionamento da plataforma é que saberemos os fenômenos que regem o comportamento da estrutura juntamente com as teorias que as governam.

A principal diferencial se dá em dois aspectos: o primeiro é quanto os mecanismos de flutuação da estrutura sendo essas fixas ou flutuantes, e a segunda diferenciação é feita a partir da finalidade dessa estrutura podendo ser usada para a produção ou perfuração de petróleo.

2.1.1. Plataformas Fixas

São as plataformas mais usuais, sendo utilizadas tanto para a perfuração quanto para a produção de petróleo. Sua instalação é relativamente simples e permite que o controle dos poços seja feito da superfície. São feitas de estruturas modulares de aço que são cravadas no fundo do mar por estacas e feitas para operações de grandes durações

Essas estruturas encontram-se apoiadas diretamente sobre solo marinho com pequenas lâminas d'água, sendo essa sua principal limitação com relação a produção petrolífera, para ambientes de maior profundidade onde o consumo de aço e o porte da estrutura se tornariam muito grande e inviável economicamente.

São exemplos das plataformas do tipo fixa:

- **Auto elevatórias:** São constituídas basicamente de uma balsa equipada com estrutura de apoio, ou pernas, que, acionadas mecânica ou hidráulicamente, movimentam-se para baixo até atingirem o fundo do mar (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**). Em seguida, inicia-se a elevação da plataforma acima do nível da água, a uma altura segura e fora da ação das ondas. Essas plataformas são móveis, sendo transportadas por rebocadores ou por propulsão própria. Destinam-se à perfuração de poços exploratórios na plataforma continental, em lâminas d'água que variam de 5 a 150 metros (ISI Engenharia,2011).
- **Jaqueta:** Têm sido as preferidas nos campos localizados em lâminas d'água de até 200 metros. Geralmente as plataformas fixas são constituídas de estruturas modulares de aço, instaladas no local de operação sob estruturas chamadas jaquetas, presas com estacas cravadas no fundo do mar (Figura 2.2). As plataformas fixas são projetadas para receber todos os equipamentos de perfuração, estocagem de materiais, alojamento de pessoal, bem como todas as instalações necessárias para a produção dos poços. Não têm capacidade de estocagem de petróleo ou gás, que são enviados para a terra através de oleodutos e gasodutos (ISI Engenharia,2011) .



Figura 2.1 - Exemplo de plataforma do tipo auto elevatória. Fonte: ISI Engenharia (2011).

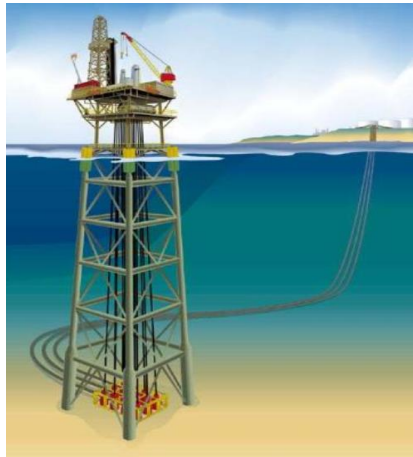


Figura 2.2 - Exemplo de plataforma do tipo jaqueta. Fonte: ISI Engenharia (2011)

2.1.2. Plataformas flutuantes

As plataformas do tipo flutuantes (Figura 2.3) surgiram no intuito de explorar grandes profundidades, assim são o produto da evolução tecnológica na engenharia petrolífera, essas chegam a explorar águas de mais de 1000 m de profundidade. E nesse tipo de plataformas, cabos de aço com comprimentos enormes se encontram altamente tensionados e sobre constante efeitos das marés e ondas sendo os fenômenos dinâmicos regidos pela equação de onda sendo

altamente suscetíveis à fenômenos como vibração e propagação de ondas, fadiga e desprendimento de vórtices.

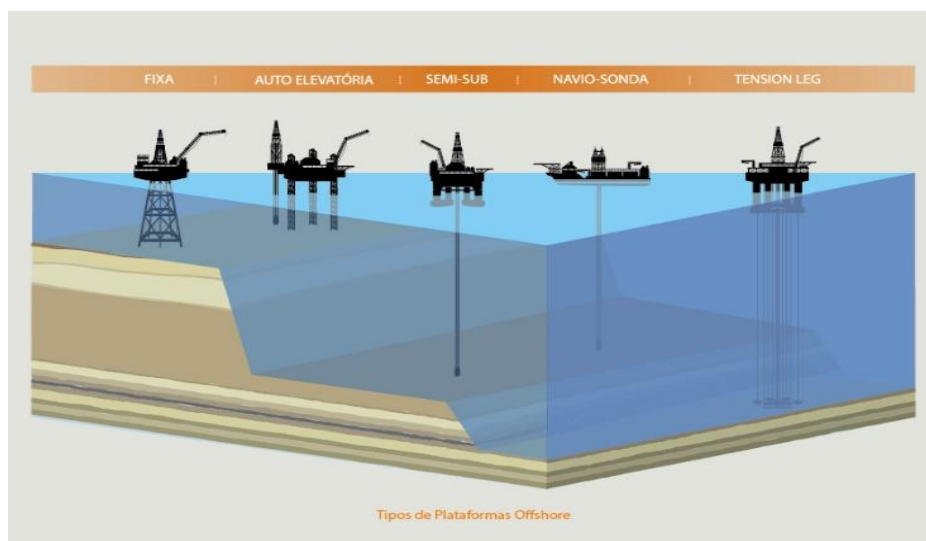


Figura 2.3 - Diferentes tipos de plataformas e seus mecanismos de fixação. Fonte: ISI Engenharia (2011)

Os principais exemplos de plataformas flutuantes (Figura 2.4) são:

- Semissubmersível: são compostas de uma estrutura de um ou mais conveses, apoiadas em flutuadores submersos. Uma unidade flutuante sofre movimentações devido à ação das ondas, correntes e ventos, com possibilidade de danificar os equipamentos a serem descidos no poço. Por isso, torna-se necessário que ela fique posicionada na superfície do mar, dentro de um círculo com raio de tolerância ditado pelos equipamentos de subsuperfície. Dois tipos de sistema são responsáveis pelo posicionamento da unidade flutuante: o sistema de ancoragem e o sistema de posicionamento dinâmico ISI Engenharia (2011).
- TLP (*Tension Leg Platform*): Plataforma de pernas atirantadas – são unidades flutuantes utilizadas para a produção de petróleo. Sua estrutura é bastante semelhante a da plataforma semissubmersível. Porém, sua ancoragem ao fundo mar é diferente: as TLPs são ancoradas por estruturas tubulares, com os tendões fixos ao fundo do mar por estacas e mantidos esticados pelo excesso de flutuação da plataforma, o que reduz severamente os movimentos da mesma. Desta forma, as operações de perfuração e produção das TLPs são semelhantes às executadas em plataformas fixas ISI Engenharia (2011).

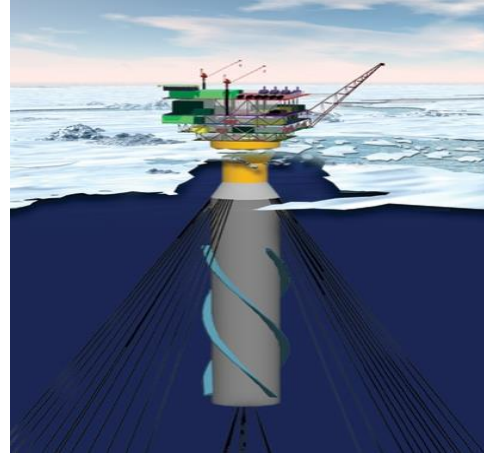


Figura 2.4– Exemplo de uma plataforma semissubmersível e do tipo SPAR. Fonte: ISI Engenharia (2011)

2.2. Teoria linear de Airy

A principal dificuldade do estudo de ondas marítimas é o aparente estado entrópico e caótico do sistema. Porém, ao se retirarem os fenômenos localizados e ao considerar o fenômeno mais usual, sem efeitos de segunda ordem, é possível formular um modelo matemático simplificado para o auxílio do entendimento do comportamento das ondas.

As teorias usuais de ondas possuem um outro desafio que é a não linearidade intrínseca do problema, assim a tentativa de apresentar uma formulação teórica realista, mas linearizada, do problema foi estruturada a chamada teoria linear de ondas de Airy, ou Stokes de primeira ordem, que soluciona a Equação de Laplace para o escoamento potencial a partir das seguintes simplificações:

- O movimento é irrotacional;
- O fluido é ideal (não viscoso);
- As ondas são longas e bidimensionais;
- As ondas possuem baixa amplitude em relação ao seu comprimento de onda, e sua função de forma permanece invariável no tempo e no espaço;

- As tensões superficiais são negligenciáveis;
- A pressão na superfície livre é uniforme e constante;
- O fluido é homogêneo e incompressível (densidade do fluido constante);
- O fundo do mar é horizontal, fixo e impermeável ($\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$);
- Não há transporte de matéria;
- Não há solicitações diretas do vento;
- Não há fluxos de calor;

A teoria linear das ondas de pequena amplitude parte primariamente do estudo de uma equação potencial de velocidade $\Phi(x, y, z, t)$ que fornece na forma de uma grandeza escalar o potencial cinético em um ponto específico do espaço em um determinado tempo. Assim o escoamento se dá de um ponto de maior potencial para o de menor potencial sendo que as equipotenciais de velocidades se dispõem ortogonalmente ao fluxo do movimento.

A partir desse potencial de velocidade e da simplificação do movimento irrotacional do fluido, é possível obter o vetor velocidade (\vec{V}) como o gradiente dessa função escalar. Assim tomando como referencial um elemento líquido infinitesimal de coordenadas (x, y, z) tem-se que a velocidade em determinado período t :

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \quad (2.1)$$

onde $\vec{\nabla}$ é o operador diferencial gradiente ou "del".

Pode-se ainda escrever a Eq. (2.1) como:

$$\vec{\nabla}\Phi = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (2.2)$$

em que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ são os vetores unitários que formam a base de um espaço Euclidiano e (u, v, w) são as componentes do vetor velocidade das direções x, y, z . dadas por:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.3)$$

Uma vez que velocidade tem grandeza LT^{-1} (comprimento por tempo) e é obtida com a derivada espacial de Φ , esta função escalar deve ter grandeza de L^2T^{-1} , ou unidade de m^2/s no Sistema Internacional (S.I.).

Assim foi considerado o meio contínuo, formado por elementos infinitesimais, pois uma abordagem discreta complicaria muito a descrição da interação entre as moléculas de água e o escoamento como um processo geral.

É a partir dessa condição da continuidade do sistema que se pode tomar como objeto de estudo o elemento Euleriano infinitesimal cúbico e, a partir da lei da conservação da massa, traduzida como conservação da vazão em meios fluidos, pode-se concluir que para esse elemento tem-se que a quantidade da água que entra nesse volume de controle é consequentemente a mesma que sai, sendo a variação de vazão (volume por unidade de tempo) então igual a zero:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla}^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

Essa condição só é atendida devido condição de movimento irrotacional do fluido que permite simplificar a velocidade como o gradiente de Φ , desprezando assim as parcelas de rotação no elemento.

A equação 2.4 é denominada usualmente como equação de Laplace. Essa equação descreve o comportamento do escoamento potencial de fluidos invíscidos, incompressíveis e irrotacionais. Sua solução, para condições de contorno e condições iniciais conhecidas, fornece a base para a determinação de todas as demais grandezas derivadas de interesse do problema. Entretanto, Laplace fornece apenas uma equação para três incógnitas representadas pelas componentes de velocidade (u, v, w) . Portanto, é preciso simplificar a geometria para condições bidimensionais (u, v) e acrescentar outras condições físicas para a solução do problema.

2.2.1. Equação de Bernoulli

A Equação de Bernoulli permite estudar e compreender as transformações energéticas no fluido entre suas principais formas (potencial e cinética). Essa equação é dada por:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho ||\vec{V}||^2 = Q \quad (2.5)$$

onde ρ é a densidade do fluido (grandeza ML^{-3} , unidade no S.I. kg/m^3), p é a pressão em um ponto do fluido ($ML^{-1}T^{-2}$; unidade em Pa ou N/m^2), g é aceleração da gravidade ($9,81 \text{ m/s}^2$), y é a cota ou elevação (L, m) em relação a um nível de referência arbitrário, $||\vec{V}||$ é o módulo do vetor velocidade (LT^{-1} , m/s) e Q um valor constante, designado como constante de Bernoulli.

É possível reescrever a equação de Bernoulli para esse caso, simplificando o movimento e o adaptando à realidade do problema e às hipóteses simplificados pela teoria de Airy como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] = Q^* \quad (2.6)$$

As equações de Bernoulli e de Laplace fornecem as condições físicas de conservação de massa e energia, necessárias para resolver o problema do campo potencial de velocidades em duas dimensões, sujeito às demais simplificações já descritas.

2.2.2. Condições Iniciais e Condições de Contorno

A equação de Laplace trata-se de uma equação diferencial em que se busca encontrar o valor dessa função potencial e consequentemente seus campos cinemáticos.

Tratando-se de uma equação diferencial de segunda ordem é necessário estabelecer inicialmente duas condições de contorno do problema, por isso é importante a hipótese inicial de o fundo do mar ser horizontal e impermeável, o que implica na profundidade do mar ser constante e na velocidade vertical $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$ no fundo ser igual a zero.

A segunda condição de contorno apresenta-se de forma mais complexa e é pela superfície da onda, que, até o momento, não se sabe nem o seu formato nem suas componentes de

velocidades. Assim, inicialmente define-se uma função de superfície $\eta(x,t)$ que representa a altura da onda a partir do nível estático do mar em função da sua coordenada x e do tempo. Para determinar se um ponto genérico de atributos (x,y,z,t) se encontra acima ou abaixo do nível da superfície, define-se agora a seguinte função:

$$f(x, y, t) = \eta(x, t) - y \quad (2.7)$$

Portanto, caso o ponto se encontre mais alto que o valor da superfície η para aquele determinado x e t , o valor dessa função arbitrária $f(x,y,t)$ é negativo e na condição de o ponto se encontrar inferior à superfície oceânica a função teria valor positivo.

Para que um elemento do fluido se encontre diretamente sobre a superfície é necessário que o valor dessa função verificadora de superfície seja sempre zero. É criado então a função:

$$S(x, y, t) = \eta(x, t) - y = 0 \quad (2.8)$$

$$\eta(x, t) = y \quad (2.9)$$

Para atender a essa condição é necessário que esse ponto em questão se comporte de forma em que este se encontre sempre sobre o contorno η , assim a condição cinemática da superfície de contorno é que a derivada material seja nula:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}u + \frac{\partial S}{\partial y}v = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}S = 0 \quad (2.11)$$

No caso do problema bidimensional a equação pode ser reduzida e reescrita em função de η e Φ utilizando também da relação disposta na Eq. (2.7):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

Finalizando a condição cinemática da superfície livre é dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.13)$$

A condição dinâmica na superfície livre é obtida aplicando a Equação de Bernoulli no ponto da superfície em questão, e sabendo que este se encontra em contato com a superfície atmosférica ($p = p_{atm}$) tem se que:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta + \frac{1}{2g} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{para } y = \eta(x, t) \quad (2.14)$$

Para simplificar essa equação é feita uma nova hipótese. Como a equação de Bernoulli da forma apresentada na equação (2.14) fornece os termos como alturas ou cargas hidráulicas, o termo não linear das velocidades pode ser negligenciado devido às pequenas dimensões que esta parcela contribui em relação aos outros termos como, por exemplo, a profundidade do mar. Ademais as condições de contorno podem ser aplicadas em $y=0$.

Assim a equação (2.14) pode ser reduzida para:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta = 0 \quad (2.15)$$

Ou seja:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad y = 0 \quad (2.16)$$

Outra hipótese, essa tomada inicialmente, é que as ondas possuem pequenas amplitudes em relação ao seu comprimento de onda, assim as ondas possuem inclinações muito pequenas, sendo plausível considerar:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx 0 \quad (2.17)$$

Com essas simplificações, é possível agora retornar à equação da condição cinemática (2.13) simplificando-a assim:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx \frac{\partial \eta}{\partial t} y = \eta(x, t) \quad (2.18)$$

É possível trazer a condição de contorno utilizando da série de Taylor e parando na primeira expansão ($n \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cong 0$), eliminando η das condições de contorno:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad y = 0 \quad (2.19)$$

Derivando agora a equação (2.16) em função do tempo e utilizando da equação (2.19), podemos escrever a condição de contorno da velocidade na superfície finalmente sem o termo da superfície desconhecida η .

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.20)$$

2.2.3. Resolução Geral do Problema Simplificado

Tendo finalmente descrito a condição de contorno da superfície em termos independente da função η , até então desconhecida, tem-se agora finalmente as ferramentas necessárias para a resolução da equação (2.4) diferencial de Laplace inicial:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.21)$$

Condição de contorno de superfície Eq. (2.20):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad y \approx 0 \quad (2.22)$$

Condição de contorno no fundo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = -h \quad (2.23)$$

Resolvendo-se a E.D.P., utilizando o Método das Separações de Variáveis, obtém-se a solução final (Pedroso,1982) da equação potencial da velocidade dada por:

$$\phi(x, y, t) = \frac{Ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k(y + h)]}{\cosh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (2.24)$$

Com essa forma final pode-se ainda retornar na equação (2.18) para finalmente ter uma ideia da função de superfície da onda η , e concluir que esta superfície se comporta como uma função trigonométrica:

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = A \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.25)$$

2.2.4. Características do escoamento

Após descobrir que o escoamento superficial das ondas progressivas se comporta de forma senoidal, pode-se atribuir uma série de propriedades intrínsecas a esse tipo função nessas ondas oceânicas.

A partir do perfil da equação (2.25) de superfície podem-se identificar os parâmetros, ilustrados na Figura 2.5:

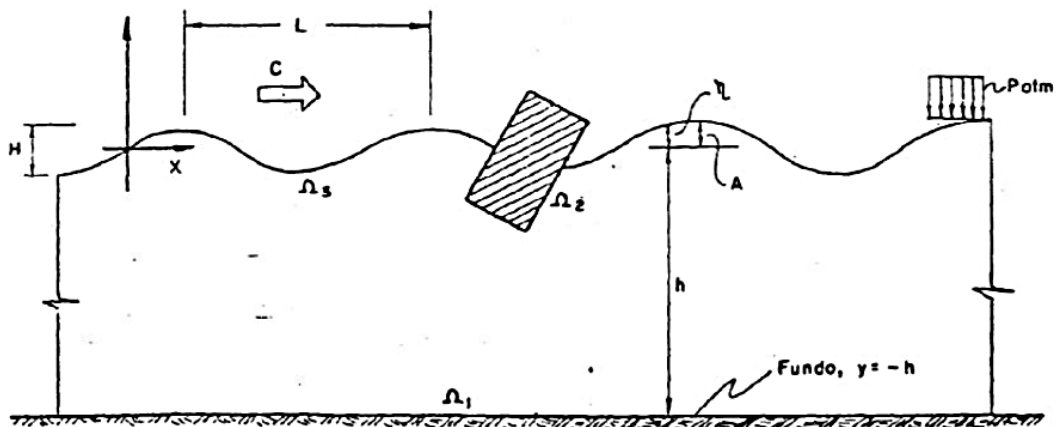


Figura 2.5 - Parâmetros do movimento ondulatório. Fonte: Pedroso (1982)

- A – Amplitude de onda (metade da altura de onda H)
- k – Número de onda
- ω – Velocidade angular
- T – Período

- L – Comprimento de Onda
- C - Celeridade
- h - profundidade

Onde:

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.26)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.27)$$

Uma outra propriedade clássica da hidrodinâmica e do estudo de ondas oceânicas é a celeridade de onda. Esta corresponde à velocidade horizontal de propagação da crista da onda é definida pela razão:

$$C = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (2.28)$$

É possível demonstrar a partir da condição de impenetrabilidade do fundo que a celeridade C é dada por (Manson, 1981).

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)} \quad (2.29)$$

E voltando para a equação (2.28) tem-se que o comprimento de onda L pode ser obtido iterativamente a partir da profundidade h e do período T por:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (2.30)$$

É possível também obter ω pelas equações acima, obtendo assim:

$$\omega = \sqrt{\left(g \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right)\right)} \quad (2.31)$$

É importante salientar que a validade do método se dá pela aproximação $\eta(x, t) \cong 0$, e para a utilização das formulações e tabelas construídas para a simplificação do problema deve-se considerar a seguinte condição;

$$\frac{h}{L} \leq 0,05 \quad (2.32)$$

Na Figura 2.6 apresenta-se um gráfico onde podem ser verificados os limites de aplicabilidade desta teoria em função de dois parâmetros adimensionais ($\frac{H}{gT^2}$ e $\frac{d}{gT^2}$).

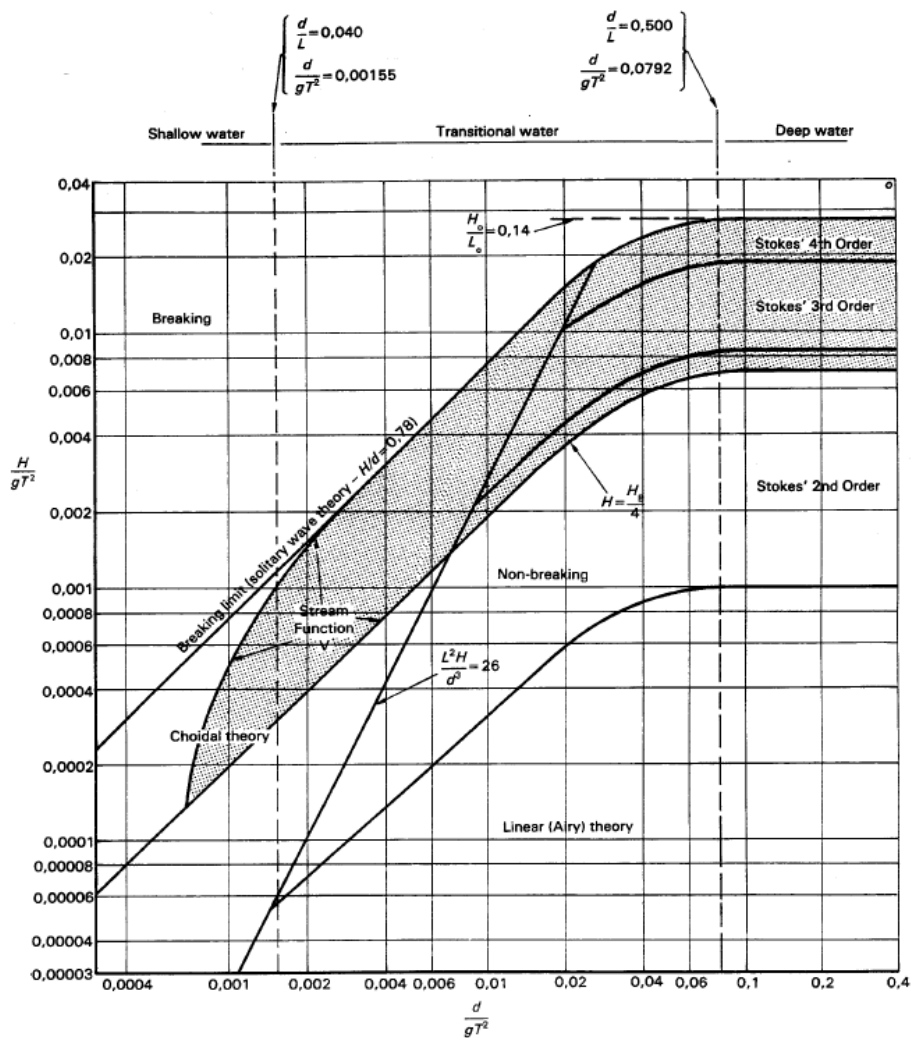


Figura 2.6 – Aplicabilidade da teoria linear de Airy. Fonte: Martinez (2017)

2.2.5. Determinação das velocidades e acelerações

Agora conhecida a forma final da equação potencial de velocidade é possível obter o vetor velocidade pelo gradiente dessa função, ou seja, simplesmente derivando em função de x e y no caso de um problema bidimensional.

As equações paramétricas das respectivas componentes horizontais e verticais dos elementos são dadas por:

$$u = -\frac{Agk \cosh[k(h+y)]}{\omega \cosh(kh)} \sin(kx - wt) \quad (2.33)$$

$$v = \frac{Agk \sinh[k(h+y)]}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - wt) \quad (2.34)$$

As equações das componentes verticais e horizontais da aceleração são fornecidas por:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = Agk \frac{\cosh[k(h+y)]}{\cosh(kh)} \cos(kx - wt) \quad (2.35)$$

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} = Agk \frac{\sinh[k(h+y)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - wt) \quad (2.36)$$

2.2.6. Deslocamento das partículas d'água

Com a determinação dos campos cinemáticos é possível obter também o deslocamento de uma partícula ao longo do tempo através da integral das velocidades u e v no tempo.

$$d_x = \frac{Agk \cosh[k(h+y)]}{\omega^2 \cosh(kh)} \cos(kx - wt) \quad (2.37)$$

$$d_y = \frac{Agk \cosh[k(h+y)]}{\omega^2 \cosh(kh)} \sin(kx - wt) \quad (2.38)$$

Pode-se ainda simplificar as equações (2.37, 2.38) com o auxílio também da equação (2.27):

$$d_x = A \frac{\cosh[k(h+y)]}{\sinh(kh)} \cos(kx - wt) \quad (2.39)$$

$$d_y = A \frac{\sinh[k(h+y)]}{\sinh(kh)} \sin(kx - wt) \quad (2.40)$$

É possível reescrever as equações (2.39 e 2.40) como

$$\cos(kx - wt)^2 = \left(\frac{d_x}{A} \frac{\sinh(kh)}{\cosh[k(h+y)]} \right)^2 \quad (2.41)$$

$$\sin(kx - wt)^2 = \left(\frac{d_y}{A} \frac{\sinh(kh)}{\cosh[k(h+y)]} \right)^2 \quad (2.42)$$

Portanto é possível escrever a seguinte relação:

$$\frac{d_x^2}{\bar{A}^2} + \frac{d_y^2}{\bar{B}^2} = 1 \quad (2.43)$$

Sendo:

$$\bar{A} = A \frac{\cosh[k(h+y)]}{\sinh(kh)} \quad (2.44)$$

$$\bar{B} = A \frac{\sinh[k(h+y)]}{\sinh(kh)} \quad (2.45)$$

Assim as trajetórias das partículas d'água obedecem a uma função elíptica, conclusão que vai de acordo com hipótese da teoria de não haver transporte de matéria com a propagação de onda. É também importante perceber que essas trajetórias dependem dos parâmetros \bar{A} e \bar{B} , que por sua vez dependem do produto da profundidade pelo número de onda (kh), assim para profundidades maiores as trajetórias se aproximam de um movimento circular, enquanto no caso de águas rasas elas se comportam como elipses, como ilustrado nas figuras 2.7 e 2.8, respectivamente.

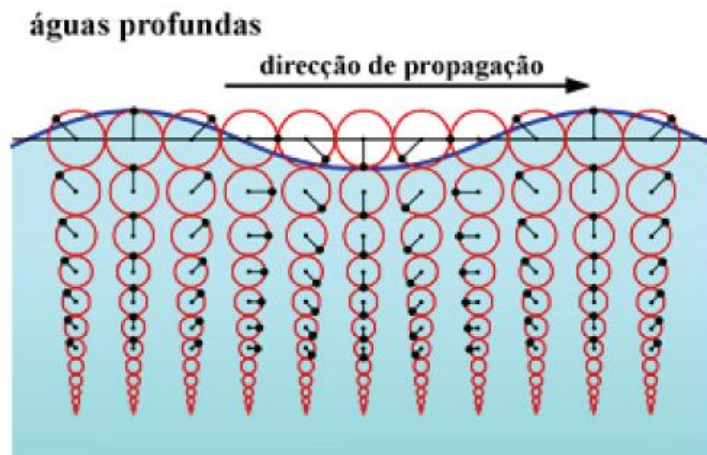


Figura 2.7 - Trajetória das partículas d'agua para altas profundidade.

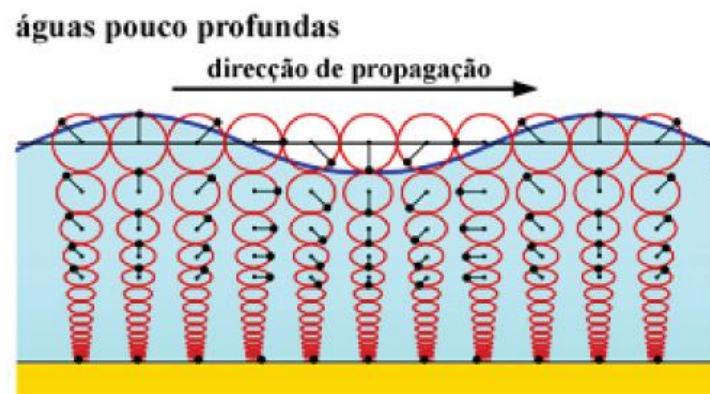


Figura 2.8 – Trajetória das partículas d'agua para baixas profundidades.

Outro fator importante é o decaimento do tamanho dessa elipse, tornando-se praticamente desprezível a uma profundidade $\frac{L}{2}$, como ilustrado na Figura 2.9

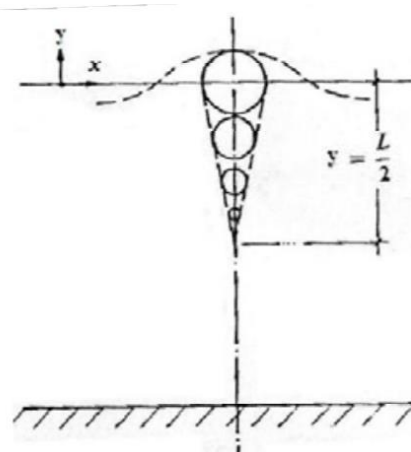


Figura 2.9 – Decaimento do raio de trajetória. Fonte: Silva (2009)

2.3. Forças na Estrutura - Formulação de Morrison

Morrison procurou obter uma formulação teórica para as forças atuantes em um cilindro perpendicular ao fluxo do fluido. Esse desenvolvimento partiu do princípio que o diâmetro do cilindro em questão é muito pequeno em comparação com as ondas incidentes, e que o cilindro possui uma dimensão predominante em relação às outras.

Morrison sugere que a força por unidade de comprimento variável ao longo do tubo advém de duas componentes (inercial e arraste hidrodinâmico). Assim a força total horizontal (F_t) depende de uma primeira parcela e é proveniente da componente estacionária do movimento, ou seja, a sua velocidade horizontal u , enquanto a segunda parcela corresponderia à inércia do sistema e seria relacionado à aceleração deste. A dedução da equação de Morrison é baseada na conservação da quantidade de movimento para um volume de contorno perpendicular ao fluxo do fluido e esta equação se apresenta da seguinte forma:

$$f = f_I + f_D = C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \dot{u} + C_D \frac{1}{2} \rho D |u|u \quad (2.46)$$

onde C_M e C_D são constantes experimentais denominadas, respectivamente, por coeficiente de inércia ou massa e coeficiente de arraste; ρ é a densidade do fluido; D é o diâmetro do cilindro. No segundo termo da Eq. (2.46), que define a força de arraste do movimento fluido, o quadrado da velocidade é escrito como $|u|u$, de modo a levar em conta a mudança de sinal da força com a mudança do sentido.

Trazendo as equações (2.33) e (2.35) na Eq. (2.46), pode-se escrever as componentes da força f como:

$$f_I = \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{gH}{2} k \frac{\cosh[k(h+y)]}{\cosh(kh)} \cos(kx - wt) \quad (2.47)$$

$$f_D = C_D \frac{1}{2} \rho D g H^2 \left(\frac{gT^2}{4L^2} \right) \left| \frac{\cosh[k(h+y)]}{\cosh(kh)} \right|^2 \sin(kx - wt) |\sin(kx - wt)| \quad (2.48)$$

Interpretando a equação final de Morrison, percebe-se que seu valor máximo se encontra quando $y = 0$, ou seja, no nível da onda e seu valor diminui com a profundidade especialmente a parcela relacionada ao arraste.

2.3.1. Coeficientes das forças hidrodinâmicas

Um dos problemas mais comuns no estudo das forças provocadas pelas ondas está na escolha dos parâmetros empíricos hidrodinâmicos (C_M e C_D). Esta complicação se deve à dificuldade de estimá-los corretamente devido à quantidade de fatores que influenciam esses parâmetros, tais como, número de Reynolds e o número de Keulegan-Carpenter, irregularidades na superfície do corpo, variações ao longo da estrutura e do tempo, geometria etc.

O coeficiente de arraste (C_D) depende do coeficiente de Reynolds do escoamento juntamente da rugosidade do cilindro. São apresentadas no mesmo gráfico da Figura 2.10 várias curvas experimentais para diferentes tipos de rugosidade, normalmente é utilizado o de um cilindro com moderada rugosidade.

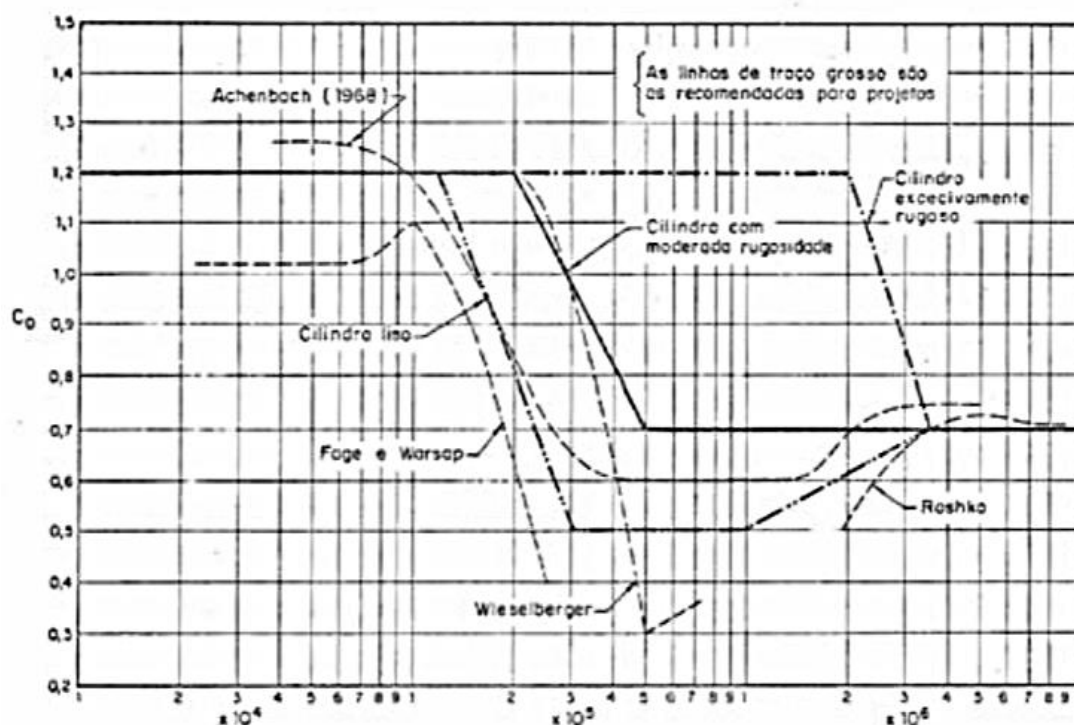


Figura 2.10 – Variação do coeficiente de Arraste, com o Número de Reynolds. Fonte :PEDROSO,1982

É possível identificar três regimes para a curva em questão:

- Regime subcrítico: $Re < 10^5$, $C_D = \text{constante}$, isto é, $C_D = 1,2$;
- Regime de transição: $10^5 < Re < 4 \times 10^5$, C_D varia linearmente com Re ;
- Regime super-crítico: $Re > 10^5 \times 10^5$, onde $C_D = \text{constante}$, isto é, $C_D \cong (0,6 - 0,7)$.

Já o coeficiente de massa C_M , usualmente considerado igual a 2, pode ser estimado mais precisamente a partir do número de Reynolds. O número de Reynolds é calculado como:

$$Re = \frac{u \cdot D}{\vartheta} \quad (2.49)$$

Sendo u a velocidade horizontal incidente no tubo, D o diâmetro do tubo e ϑ a viscosidade cinemática do fluido. Tabela 2-1, apresentam algumas relações para o valor de C_M .

Tabela 2-1. Estimativa do valor do coeficiente de massa C_M , em função do número de Reynolds

C_M	Reynolds (Re)
2	$Re > 5 \times 10^5$
2,5	$2,5 \times 10^5 < Re < 5 \times 10^5$
1,5	$Re > 5 \times 10^5$

2.3.2. Forças totais na estrutura

A formulação de Morrison fornece a força vertical total em um ponto do cilindro, mas para a engenharia é muito importante saber as forças totais atuantes na estrutura, pois é a partir destas que são calculadas as reações na base da estrutura, assim basta integrar a equação de Morrison ao longo da estrutura, desconsiderando a altura η e se obtém:

$$F = \int_{-h}^0 f_I dy + \int_{-h}^0 f_D dy = F_I + F_D \quad (2.50)$$

$$M = \int_{-h}^0 (y + h) f_I dy + \int_{-h}^0 (2 + h) f_D dy = M_I + M_D \quad (2.51)$$

2.4. Dinâmica das estruturas

As deduções para os seguintes casos de movimento foram obtidas através das referências French (1971) e Pedroso (1998).

2.4.1. Sistema com um Grau de Liberdade (SUGL)

Para descrever o movimento ondulatório complexo de um corpo parte-se inicialmente do estudo de um simples modelo massa-mola amortecido com um único grau de liberdade. Esse sistema, conforme a Figura 2.11 possui uma massa (m) uma mola com rigidez (k) e um amortecedor de amortecimento (c).

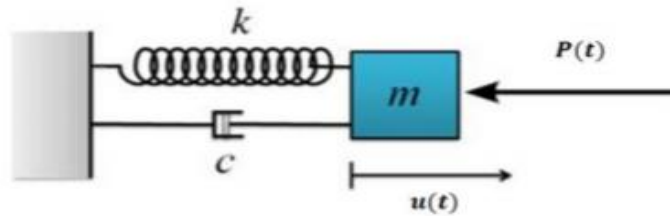


Figura 2.11 - Modelo massa-mola amortecido. Chakbarti, 2011

Ao analisar o diagrama de corpo livre, vê-se que a força elástica (f_s) e a força de amortecimento (f_d) agem no sentido contrário ao deslocamento e velocidade e o equilíbrio dinâmico final pode ser descrito como:

$$\sum F = m\ddot{u}(t) \quad (2.52)$$

Expandindo tem-se:

$$m\ddot{u}(t) = -f_s - f_d \quad (2.53)$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.54)$$

Adotando-se uma solução do tipo:

$$u(t) = Xe^{st} \quad (2.55)$$

E inserindo equação (2.55) na equação (2.54) obtém-se a equação que descreve o movimento viscoso, e cujas raízes não triviais (X é uma constante e $X \neq 0$) busca-se encontrar:

$$(ms^2 + cs + k)Xe^{st} = 0 \quad (2.56)$$

Assim a primeira parcela da equação deve ser igual a zero, e sua solução por Bhaskara tem a seguinte forma:

$$s_{1,2} = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (2.57)$$

Portanto, percebe-se que três cenários são possíveis dependendo do que acontece no interior dessa raiz. Dessa forma é interessante definir o valor de c no qual essa relação é zerada oferecendo assim apenas uma raiz para o problema, cujo valor é denominado coeficiente de amortecimento crítico c_r :

$$c_r = 2\sqrt{mk} \quad \text{ou} \quad c_r = 2m\omega_n, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.58)$$

Sabe-se que na realidade o que é importante não é necessariamente o valor de c_r e sim sua relação com o coeficiente de amortecimento do sistema (c), assim é criado um coeficiente ξ que fornece a seguinte informação:

$$\xi = \frac{c}{c_r} \quad (2.59)$$

- $\xi < 1$: movimento oscilatório com raízes $s_{1,2}$ complexas;
- $\xi = 1$: movimento não oscilatório com raízes $s_{1,2}$ reais e iguais;
- $\xi > 1$: movimento não oscilatório com raízes $s_{1,2}$ reais e diferentes;

Utilizando das equações (2.57 e 2.58), pode-se reescrever as raízes em função de ξ .

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.60)$$

E a solução geral para solução livre descrita pela equação:

$$u(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t} \quad (2.61)$$

E suas condições de contorno dadas por:

$$u(0) = u_0; \quad \dot{u}(0) = v_0; \quad (2.62)$$

2.4.1.1. Amortecimento subcrítico

No caso do amortecimento subcrítico a oscilação diminui de maneira lenta e gradual, resultando em um amortecimento fraco.

Para esse tipo de amortecimento pode-se reescrever a equação (2.60) como:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.63)$$

O termo $\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ é muitas vezes escrito como ω_d e denominado como frequência natural amortecida e é sempre menor que 1 ($\xi < 1$)

Levando a equação (2.63) na equação (2.61) e expandindo-a com a ajuda da formulação de Euler, o movimento de um oscilador simples pode ser descrito como:

$$u(t) = e^{-\omega_n t} \left[u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (2.64)$$

2.4.1.2. Amortecimento crítico

Nesse tipo de amortecimento o movimento perde rapidamente sua energia, deixando de ser um movimento periódico. Nesse escoamento dito crítico, o movimento volta rapidamente a sua posição de equilíbrio quando posto para oscilar. Um exemplo desse tipo de amortecimento ocorre no caso de portas de elevador, quando a porta é fechada bruscamente ela retorta à sua posição inicial de forma suave e paulatinamente.

Para esse caso $\xi = 1$ e as raízes podem ser escritas ambas como:

$$s_{1,2} = -\omega_n \quad (2.65)$$

E a solução da EDO utilizando as duas condições de contorno:

$$u(t) = [u_0(1 + \omega t) + \dot{u}_0]e^{-\omega_n t} \quad (2.66)$$

2.4.1.3. Amortecimento supercrítico

No amortecimento supercrítico a taxa de amortecimento é maior que um e as raízes da equação característica são reais e diferentes:

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.67)$$

E a solução da EDO utilizando das condições de contorno é:

$$u(t) = e^{-\omega_n t} \left[u_0 \cosh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t) + \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_n}{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t) \right] \quad (2.68)$$

2.4.1.4. Decaimento logarítmico

É comum na maioria dos sistemas estruturais não conhecer o fator de amortecimento ξ . Uma forma de resolver esse problema para sistemas com um único grau de liberdade é estimá-lo a partir do decremento logarítmico de ζ .

Esse decremento é definido como o logaritmo natural da razão entre duas amplitudes consecutivas. Para um movimento amortecido oscilatório, ou seja, subcrítico, tem-se:

$$\zeta = \ln \left(\frac{u(t)}{u(t + \frac{2\pi}{\omega_d})} \right) \quad (2.69)$$

Aplicando exponencial dos dois lados e denominando as amplitudes consecutivas pelo seu sub-índice, tem-se:

$$e^\zeta = \frac{u_0}{u_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2}{u_3} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \quad (2.70)$$

É preciso notar que $\frac{u_0}{u_n} = \frac{u_0}{u_1} \frac{u_1}{u_2} \frac{u_2}{u_3} \dots \frac{u_{n-1}}{u_n}$, e é possível reescrever a equação como:

$$e^{n\zeta} = \frac{u_0}{u_n} \quad (2.71)$$

Assim pode-se obter o decremento logaritmo ζ , a partir de uma amplitude e outra amplitude subsequente defasada de $n \frac{2\pi}{\omega_d}$ utilizando de:

$$\zeta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u_0}{u_n} \right) \quad (2.72)$$

Sabendo que a resposta para o escoamento subcrítico é também escrita comumente por:

$$u(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (2.73)$$

Pode-se reescrever a Eq. (2.72) como:

$$\zeta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{X e^{-\xi \omega_n t_0} \text{sen}(\omega_d t_0 + \phi)}{X e^{-\xi \omega_n t_n} \text{sen}(\omega_d t_n + \phi)} \right) \quad (2.74)$$

É possível, após algumas manipulações, reescrever a equação em função do coeficiente de amortecimento obtendo assim o fator de amortecimento.

$$\xi = \frac{\zeta}{\sqrt{4\pi^2 + \zeta^2}} \quad (2.75)$$

2.4.2. Vibração forçada

Para o contexto da engenharia, esse tipo de oscilação é a que merece maior destaque, pois é nesse tipo de movimento que pode ocorrer o fenômeno denominado ressonância. Esse fenômeno é descrito pelo aumento da amplitude desse movimento devido à proximidade da frequência natural e da forçada pela solicitação ($\frac{\omega}{\omega_n} \cong 1$).

Para a demonstração da equação de movimento será usada uma força harmônica no sistema. Essa força é descrita da seguinte forma:

$$f(t) = f \cos(\omega t) \quad (2.76)$$

onde f é a magnitude força e ω é a frequência de oscilação forçada.

2.4.2.1. Caso não-amortecido

Para esse caso a equação de movimento fica:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f \cos(\omega t) \quad (2.77)$$

Percebe-se que a equação diferencial a ser analisada deixa de ser homogênea, portanto a sua solução possui uma parcela descrita pela resolução da equação homogênea escrita em termos de ω_n , mais uma solução particular. Assim:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (2.78)$$

Portanto para encontrar a solução particular considera-se:

$$u_p(t) = X \cos(\omega t) \quad (2.79)$$

Realizando essa nova substituição na equação de movimento (2.77) é possível cancelar o termo trigonométrico da força harmônica e escrever a constante X como:

$$X = \frac{f}{-\omega^2 m + k} \quad (2.80)$$

E a solução particular como:

$$u_p(t) = \frac{f}{-\omega^2 m + k} \cos(\omega t) \quad (2.81)$$

Assim a equação de movimento fica:

$$u(t) = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) + \frac{f}{-\omega^2 m + k} \cos(\omega t) \quad (2.82)$$

Onde a primeira parcela é a solução da equação homogênea. Aplicando as condições de contorno pode-se descobrir as constantes A e B , finalizando assim a equação de movimento:

$$u(t) = \left[x_0 - \frac{f}{-\omega^2 m + k} \right] \sin(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \cos(\omega_n t) + \frac{f}{-\omega^2 m + k} \cos(\omega t) \quad (2.83)$$

É interessante também expressar a amplitude X através da equação abaixo com o auxílio da equação (2.28):

$$X = \frac{\frac{f}{k}}{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 1} \quad (2.84)$$

Pode-se escrever $\frac{f}{k}$ como a deflexão estática δ , que seria o equivalente da deformação realizada pela força caso essa não fosse periódica, e escrevendo também $\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ como a razão de frequência β , tem-se:

$$\frac{X}{\delta} = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (2.85)$$

É interessante também plotar o módulo dessa razão, também conhecida como FAD (fator de amplificação dinâmico), em função do fator de frequência β , como ilustrado na Figura 2.12. Assim pode-se perceber que quando essa razão possui valor unitário, significando que para o caso de uma força não harmônica a amplitude possui o valor da deflexão estática δ e na medida que $\frac{\omega}{\omega_n}$ se aproxima de 1, a amplitude do movimento tende ao infinito, fenômeno este conhecido como ressonância.

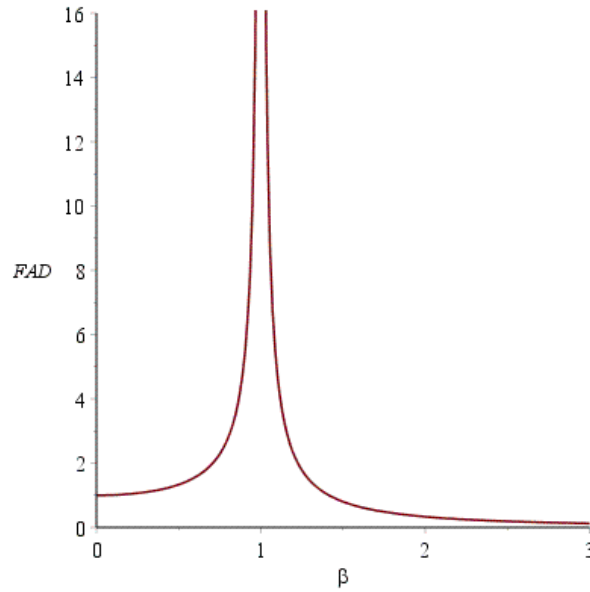


Figura 2.12 – Fator de amplificação dinâmico FAD versus fator de frequência β

2.4.2.2. Caso amortecido

Para o caso amortecido a solução se apresenta de forma semelhante, sendo ela constituída da solução homogênea mais uma solução particular devida à força externa. Para o caso de um sistema com um grau de liberdade exercendo um movimento amortecido e forçado, o diagrama de corpo livre nos fornece a seguinte equação:

$$\ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{f}{m} \cos(\omega t) \quad (2.86)$$

Sendo γ a razão do coeficiente de amortecimento pela massa e a força aplicada no sistema de natureza harmônica com frequência ω . Para a resolução desta equação diferencial é necessário estar familiarizado com números complexos, para isso utiliza-se a formulação de Euler.

$$e^{-ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad (2.87)$$

Sabendo disso será resolvida na realidade a equação (2.88), e a solução para a equação diferencial inicial é simplesmente a parte real da solução da equação proposta:

$$z''(t) + \gamma z'(t) + \omega_n^2 z(t) = \frac{f}{m} e^{-i\omega t} \quad (2.88)$$

Sendo:

$$u_p(t) = Re(z) \quad (2.89)$$

Supondo a seguinte solução:

$$z(t) = Xe^{-i\omega t} \quad (2.90)$$

Realizando as derivadas de $z(t)$ e substituindo na equação (2.88), tem-se:

$$Xe^{-i\omega t}(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_n^2) = \frac{f}{m}e^{-i\omega t} \quad (2.91)$$

É possível encontrar agora a constante X , sendo:

$$X = \frac{1}{(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_n^2)} \frac{f}{m} \quad (2.92)$$

Outra propriedade dos números complexos é ser escrito em sua forma polar, essa forma polar é:

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i\alpha} \quad (2.93)$$

Sendo α o ângulo entre a parte real e a complexa do número:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \quad (2.94)$$

Sabendo disso pode-se escrever o denominador como:

$$X = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} e^{-i\alpha} \cdot \frac{f}{m} \quad (2.95)$$

E o ângulo α em questão é obtido por:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\omega\gamma}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (2.96)$$

Assim retornando para a equação (2.90) da solução proposta tem-se que:

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \cdot \frac{f}{m} e^{-i(\omega t - \alpha)} \quad (2.97)$$

Agora para obter finalmente o deslocamento $u(t)$, é preciso lembrar da equação (2.89) que expressa que o deslocamento é apenas a parte real dessa nova solução, assim pela equação de Euler tem-se que:

$$u_p(t) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \cdot \frac{f}{m} \cos(\omega t) \quad (2.98)$$

Somando agora essa solução com a solução homogênea para um sistema amortecido e reescrevendo a solução particular em termos do fator de amortecimento (ξ) e frequência (β), invés das frequências e do parâmetro λ , tem-se:

$$u(t) = X e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) + \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \frac{f}{k} \cos(\omega t) \quad (2.99)$$

É interessante perceber no comportamento dessa função que a primeira parcela zera rapidamente devido ao seu caráter exponencial, assim esta resposta inicial, influenciada predominantemente pelo primeiro termo, é denominada de resposta transitória, enquanto após o cancelamento desse termo o regime é denominado de permanente.

Assumido o regime permanente é também pertinente a obtenção de Figura (2.13), similar à Figura (2.12), onde $\frac{f}{k}$ é o deslocamento estático e o termo que o acompanha é denominado fator

de amplificação dinâmica FAD (ou apenas D na figura). Essa figura fornece diversas curvas com o valor dessa amplificação em função das razões de frequência para vários fatores de amortecimento.

É interessante perceber que o fenômeno da ressonância é controlado pelo amortecimento, e que para o caso de $\xi \cong 0$ o sistema não possui amortecimento e as amplitudes de movimento tendem ao infinito.

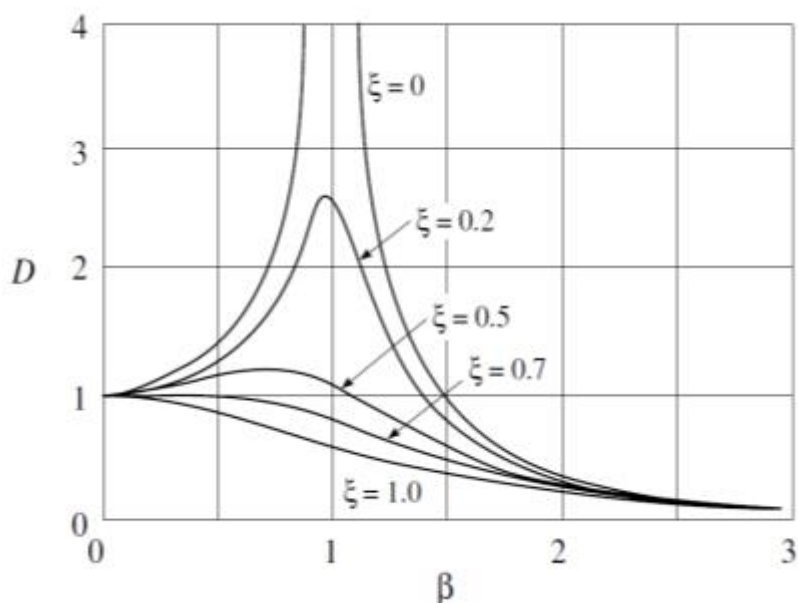


Figura 2.13 – Fator de aplicação dinâmica em função dessa razão de amplitudes. Fonte: Ferreira (2012)

2.4.3. Sistema com múltiplos graus de liberdade.

Diversos sistemas mecânicos podem ser descritos como um modelo com um único grau de liberdade, porém quando tal simplificação não se mostra razoável é necessário passar para uma modelagem com vários graus de liberdade. Sendo assim, um sistema com vários graus de liberdade pode ser escrito como vários sistemas massa-mola interconectados, resultado assim em um sistema de equações de movimento. Sabendo disso é comum se utilizar de álgebra linear para a resolução desse tipo de problema.

Utilizando a abordagem matricial a equação de movimento devido ao diagrama de corpo livre pode ser escrita como:

$$\tilde{M}\ddot{\bar{u}}(t) + \tilde{C}\dot{\bar{u}}(t) + \tilde{K}\bar{u}(t) = \bar{F} \quad (2.100)$$

sendo \tilde{M} , \tilde{C} e \tilde{K} , respectivamente, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema, \bar{u} o vetor deslocamento em cada uns dos nós (também dito vetor de coordenadas generalizadas), e \bar{F} o vetor das forças externas que excitam o sistema.

Para resolver qualquer problema relacionado a vibração é necessária a obtenção de parâmetros como a frequência natural, e para isso é necessário estudar o caso sem amortecimento e livre. Assim a equação de movimento para esse caso preliminar é:

$$\tilde{M}\ddot{\bar{u}}(t) + \tilde{K}\bar{u}(t) = 0 \quad (2.101)$$

Propondo o mesmo tipo de solução utilizada nos casos anteriores, porém na forma de um vetor de deslocamentos:

$$\bar{u} = \bar{\phi}e^{i\omega t} \quad (2.102)$$

Tem-se que a equação de movimento no caso do movimento livre sem amortecimento, ou seja, sem forças excitadoras, é:

$$(\tilde{K} - \omega^2\tilde{M})\bar{\phi}e^{i\omega t} = 0 \quad (2.103)$$

Como a função exponencial nunca assume valores negativos tem-se que:

$$(\tilde{K} - \omega^2\tilde{M})\bar{\phi} = 0 \quad (2.104)$$

Para o prosseguimento da dedução, multiplicando-se ambos os lados da equação por \tilde{M}^{-1} , e possível reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\tilde{M}^{-1}\tilde{K}\bar{\phi} = \omega^2 I \bar{\phi} \quad (2.105)$$

Assim o problema pode ser visto da seguinte maneira: uma matriz multiplicada por um vetor é equivalente a um escalar multiplicado por esse mesmo vetor. Ou seja, uma transformação linear

aplicada a um vetor equivalente a um escalar multiplicado por esse mesmo vetor, é, portanto, um clássico problema algébrico de autovalor e autovetor:

$$\tilde{A}\bar{\phi} = \lambda \bar{\phi} \quad (2.106)$$

sendo $\tilde{A} = \tilde{M}^{-1}\tilde{K}$, os autovalores são escalares dados por $\lambda = \omega^2$, e ϕ são os autovetores, denominados modos de vibração.

Existem inúmeras formas numéricas para solução de problemas com autovalor e autovetor como método das potências ou o método de Jacobi, porém uma solução mais ilustrativa, baseada puramente em álgebra linear pode ser aplicada. Para isso observe a mesma equação de movimento acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$(\tilde{M}^{-1}\tilde{K} - \omega^2 I)\bar{\phi} = 0 \quad (2.107)$$

Pode-se observar que o primeiro termo dessa equação é uma matriz, ou seja, uma transformação linear. Dessa forma uma transformação linear que transforma um vetor em um ponto (0), diminuindo assim sua dimensão, só pode então ter seu determinante igual a zero:

$$\det(\tilde{M}^{-1}\tilde{K} - \lambda I) = 0 \quad (2.108)$$

A expansão do determinante na equação (2.108) gera um polinômio de grau n (número de graus de liberdade do sistema), cujas raízes são os autovalores do problema. Com estes valores é possível obter os autovetores respectivos.

2.4.3.1. Análise Modal

A equação de movimento escrita em forma de matricial representa um sistema de equações diferenciais, e é possível desacoplá-las e torná-las independentes entre si, a partir da mudança de coordenadas generalizadas (\bar{u}) para coordenadas modais (\bar{q}), como será explicado a seguir.

Assim o sistema será feito de n equações, sendo n o número de graus de liberdade independentes, transformando-se assim em uma mera repetição de um problema com um único

grau de liberdade. A condição para esse desacoplamento é a ortogonalidade dos modos de vibração, sendo a ortogonalidade de um autovetor garantida pela simetria da transformação. Para isso é necessário, que a matriz de amortecimento se comporte de maneira especial.

Essa mudança de coordenadas generalizadas para coordenadas modais é feita da seguinte forma:

$$\bar{u}(t) = \tilde{\Phi} \bar{q}(t) \quad (2.109)$$

Isso quer dizer que qualquer movimento vibratório possa ser escrito como a combinação dos modos de vibrações relacionados as frequências naturais ponderadas por suas respectivas coordenadas modais. Assim é possível converter coordenadas generalizadas em coordenadas modais aplicando a matriz dos modos de vibração.

Sendo os modos de vibrações vinculados a uma frequência natural e independente do tempo, tem-se que as velocidades e acelerações em coordenadas naturais, são dadas por:

$$\dot{\bar{u}}(t) = \tilde{\Phi} \dot{q}(t) \quad (2.110)$$

$$\ddot{\bar{u}}(t) = \tilde{\Phi} \ddot{q}(t) \quad (2.111)$$

Substituindo as equações (2.110 e 2.111) na equação de movimento (2.100) e multiplicando ambos os lados da equação por $\tilde{\Phi}^t$, obtém-se:

$$\tilde{\Phi}^t \tilde{M} \tilde{\Phi} \ddot{\bar{q}}(t) + \tilde{\Phi}^t \tilde{C} \tilde{\Phi} \dot{\bar{q}}(t) + \tilde{\Phi}^t \tilde{K} \tilde{\Phi} \bar{q}(t) = \tilde{\Phi}^t \bar{F} \quad (2.112)$$

Dada a ortogonalidade das bases modais Φ em relação às matrizes M e K , tem-se que esses produtos matriciais resultam em matrizes diagonais, desacoplando assim as equações caso a matriz de amortecimento seja bem comportada, sendo $\bar{M}^*, \bar{C}^*, \bar{K}^*, \bar{F}^*$ denominados matrizes modais ou generalizadas, dadas por:

$$\bar{M}^* = \tilde{\Phi}^t \tilde{M} \tilde{\Phi} \quad (2.113)$$

$$\bar{C}^* = \tilde{\Phi}^t \tilde{C} \tilde{\Phi} \quad (2.114)$$

$$\bar{K}^* = \tilde{\Phi}^t \tilde{K} \tilde{\Phi} \quad (2.115)$$

$$\bar{F}^* = \tilde{\Phi}^t \bar{F} \quad (2.116)$$

Para que o problema seja desacoplado corretamente a matriz de amortecimento deve ser escrita como a combinação linear das matrizes de massa e rigidez:

$$\tilde{C} = \alpha \cdot \tilde{M} + \beta \cdot \tilde{K} \quad (2.117)$$

onde α e β são parâmetros escalares determinados experimentalmente.

Uma vez desacopladas as equações e dividindo pela massa generalizada tem-se para cada grau de liberdade individualmente:

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{F_i^*}{M_i^*} \quad (2.118)$$

Já foi apresentada a resolução dessa equação diferencial para um grau de liberdade, porém é importante lembrar que uma vez obtida a função q_i para o modo em questão é preciso multiplicar essa função pelo vetor de vibração correspondente para se obter as deformações devidas a esse modo de vibração em coordenadas generalizadas.

Encontradas todas as coordenadas modais basta voltar para a equação (2.109) para se obter os deslocamentos reais da estrutura.

3. ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Este breve capítulo apresenta as ferramentas utilizadas no desenvolvimento deste estudo. As ferramentas computacionais utilizadas na obtenção dos resultados dessa monografia são o Maple e o ABAQUS/CAE descritas nesta seção. A síntese deste capítulo se apoia em alguns estudos principais como Alva (2017), Collantes (2017) e o Abaqus/CAE User's Manual (2012), Melo e Vilches (2011).

3.1. MAPLE

O MAPLE é um tipo de software, pertencente a uma classe chamada de computação simbólica ou algébrica, dirigido para a resolução de diversos problemas em Matemática e outras Ciências afins. Este programa é uma ferramenta matemática que será utilizada para resolução rápida das equações diferenciais dos campos cinemáticos e para a obtenção dos deslocamentos da estrutura analiticamente, de modo a fornecer os parametros de entrada para a resolução numérica com o auxílio do ABAQUS/CAE.

O MAPLE é ainda um sistema gráfico que integra a capacidade de se fazer cálculo e visualização gráfica em um ambiente interativo bastante amigável, onde os problemas e suas soluções são expressos em uma linguagem matemática simples. O programa em questão possui ferramentas eficientes para a resolução de problemas. Desenvolvido pela Universidade de Waterloo no, Canadá, e pelo instituto ETH, de Zurique, Suíça, onde começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo em Waterloo, no Canadá, província de Ontário. Desde 1988, o Maple tem sido desenvolvido e comercializado pela Maplesoft, uma companhia canadense também baseada em Waterloo, Ontário.

Uma das principais características do MAPLE é permitir manipulações numéricas e simbólicas, além de gerar gráficos em dimensão 2D e 3D sendo, portanto, bastante elucidativo durante os

cálculos intermediários e serve também como uma ferramenta de diagnóstico de problemas ao gerar gráficos tridimensionais. As manipulações simbólicas são operações do tipo - expressar uma variável em função de outra, substituição, simplificação, fatoração, reagrupamentos dos termos de uma expressão, etc. A capacidade simbólica do software, permite obter soluções exatas em diversos tipos de problemas. O MAPLE consiste de três partes principais, a saber: o núcleo (kernel), que é a parte central do software, escrita em linguagem C, onde são realizadas as operações; as livrarias (*packages*), que são um conjunto de funções pré-definidas e que são acionadas por uma sintaxe própria, quando necessário; e finalmente, a interface do usuário, chamada folha de trabalho (*worksheet*), onde se realizam as operações de entrada e saída. O MAPLE tem, essencialmente, dois tipos de comandos: os que utilizam o núcleo e os comando da interface do usuário (Melo e Vilches.2011).

Assim, é também um poderoso e interativo sistema de- computação algébrica que possui uma infinidade de recursos numéricos e gráficos e proporciona um completo ambiente matemático que incluem resolução de equações, inequações, sistemas, operações com matrizes, cálculos de limites, derivadas e integrais, esboço de gráficos, entre outros.

O Maple possui visualizadores em 2D e 3D de gráficos e elementos, sendo, portanto, bastante elucidativo durante os cálculos intermediários e serve também como uma ferramenta de diagnóstico de problemas ao gerar gráficos tridimensionais. As planilhas elaboradas nesse programa estão anexadas no final dessa monografia.

3.2. ABAQUS/CAE

O programa ABAQUS®, desenvolvido pela HKS *Inc de Rhode Island* é um software de elementos finitos para criar, editar, monitorar e visualizar avançadas modelagens numéricas. Este software está sendo amplamente utilizado em diferentes ramos de engenharia. ABAQUS é um conjunto de ferramentas de simulação de engenharia, baseados no método dos elementos finitos, que pode ser usado para diversas aplicações, desde uma simples análise linear até

simulações não lineares mais desafiadoras. Pode ser utilizado para modelagem de diferentes materiais simulando o comportamento dos materiais como metais, borrachas, polímeros, compósitos, concreto armado e materiais geotécnicos como rochas e solos (Alva, 2017).

O ABAQUS pode ser usado para estudar mais do que apenas problemas estruturais. Pode simular problemas em áreas tão diversas como a transferência de calor, a difusão em massa, componentes eletrônicos, acústica, mecânica do solo e análise piezoelétrica. (ABAQUS Manual, 2010).

É relevante citar que este programa aplica três fases distintas de uma análise típica de elementos finitos, as quais são:

- Pré-processando
- Simulação
- Pós-processamento

Na etapa de pré-processamento deve se definir o modelo do problema físico e criar um ABAQUS - Arquivo de entrada. O modelo é geralmente criado graficamente usando ABAQUS / CAE ou outro pré-processador, embora o arquivo de entrada ABAQUS também possa ser criado diretamente usando um editor de texto. (Manual ABAQUS, 2014).

A simulação, que normalmente é executada como um processo de segundo plano, é o estágio no qual ABAQUS / Standard ou ABAQUS / Explicit resolve o problema numérico definido no modelo.

Exemplos de saída da análise de tensão incluem deslocamentos e tensões, e são armazenados em arquivos binários prontos para o pós-processamento. Dependendo da complexidade do problema sendo analisada e o poder do computador usado, pode levar de alguns segundos adias para concluir uma execução de análise (Manual ABAQUS, 2014).

No pós-processamento pode se avaliar os resultados assim que a simulação estiver completa e os deslocamentos, tensões ou outras variáveis fundamentais forem calculados. A avaliação é geralmente feita interativamente usando o módulo de visualização do ABAQUS / CAE ou outro pós-processador.

O modo de visualização, que lê o arquivo de banco de dados de saída binária neutro, tem uma variedade de opções para exibir os resultados, incluindo cor, diferentes gráficos de contorno, animações. (Manual ABAQUS, 2014)

Esses três estágios são conectados por meio de arquivos. De forma simplificada pode se dizer que o pré-processamento envolve criar um arquivo de entrada que contém a geometria em estudo, e onde são definidas as diversas propriedades do modelo que se deseja adotar. Na simulação ou processamento, o problema descrito no pré-processamento é resolvido através do uso de equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais. Por fim, na etapa de pós-processamento, o ABAQUS retorna os campos de tensões, deformações, status de contato, através de uma interface renderizada, onde é possível realizar animações, plotar gráficos, etc.

O software ABAQUS 3D tem sido amplamente empregado em pesquisas acadêmicas no campo da engenharia, utilizando os elementos finitos para modelar o problema real alcançando resultados ótimos.

ABAQUS/CAE é um ambiente ABAQUS completo que fornece uma interface simples e consistente para criação, submissão, monitoramento e avaliação de resultados. ABAQUS/CAE é dividido em módulos, onde cada módulo define um aspecto lógico do processo de modelagem; por exemplo, definição da geometria do problema, materiais e suas propriedades, geração de malha e especificação da análise.

À medida que se passa de um módulo para outro, cada módulo contribui com parâmetros e dados para formar um arquivo de entrada que é enviado ao ABAQUS/Standard ou ABAQUS/Explicit solver. O *solver* lê o arquivo de entrada gerado pelo ABAQUS/CAE, realiza a análise, envia informações para o ABAQUS/CAE para permitir a monitoração do progresso do trabalho, e gera um banco de dados de saída. Finalmente, o ABAQUS/CAE é usado para ler o banco de dados de saída e visualizar resultados da análise.

4. ESTUDO DE CASO

A estrutura simulada é a de uma fundação de uma plataforma de petróleo auto elevatória sujeita à ação de ondas. O tubo em questão é oco para aumentar assim seu momento de inércia e economia de material (Figura 4.1). A estrutura possui as seguintes propriedades.

- Comprimento do tubo $h= 80\text{m}$
- Diâmetro do tubo $D=5\text{m}$
- Espessura do tubo $e= 0.1\text{m}$

Esses parâmetros foram obtidos segundo os estudos de Stromblad (2012), considerando os limites de aplicabilidade da teoria linear de Airy e Morrison. Com relação a sua composição, o tubo é feito de aço com as seguintes propriedades:

- Módulo de Young do aço $E_a= 210\text{ GPa}$;
- Densidade $d= 7850\text{ kg/m}^3$;
- Coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$;

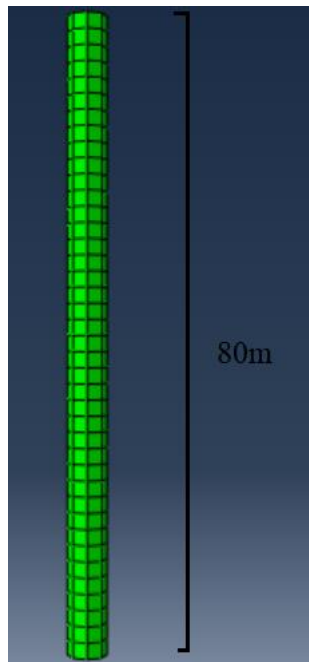


Figura 4.1 -Modelo tubo engastado

4.1. Cálculo dos campos cinemáticos

Nessa seção são calculados os parâmetros cinemáticos do movimento ondulatório que serão utilizados para os cálculos das forças atuantes na estrutura.

Os parâmetros do escoamento potencial foram adotados do Department of Army (1984).

- Período (T) = 12 s;
- Gravidade (g) = 9.82 m/s²;
- Amplitude de onda (A) = 5 m;

Os parâmetros do movimento ondulatório são calculados, utilizando as equações (2.29), (2.30) e (2.31), resultando em:

- $L=224,95$ m;
- $k=0.02804005428$ m⁻¹;
- $C=18.67324401$ m/s
- $\omega=0,26$ rad/s;

Verifica-se que o movimento oscilatório pode ser descrito pela teoria linear de Airy:

$$\frac{H}{L} = \frac{5}{224,95} < 0,05 \quad (4.1)$$

O campo escalar de potencial de velocidade, dado pela equação 2.24, é plotado em termos de linhas equipotenciais na Figura 3.2. Onde o ponto (0,-80) seria a base na qual se localizaria o tubo metáico.

O campo cinemático de velocidades é calculado utilizando as equações (2.33) e (2.35). As Figuras 4.3 e 4.4 ilustram os vetores plotados com o auxílio do Maple para o tempo t_0 . Note que vetores de velocidade são perpendiculares (gradiente) às linhas equipotenciais da Figura 4.2.

O campo de acelerações é calculado de acordo com a equação (2.35) e ilustrado na Figura 4.4. Observe que os vetores de aceleração são perpendiculares aos vetores de velocidades da Figura 3.3. Isto é compatível com o movimento circular das partículas, tal como descrito na seção 2.2.6.

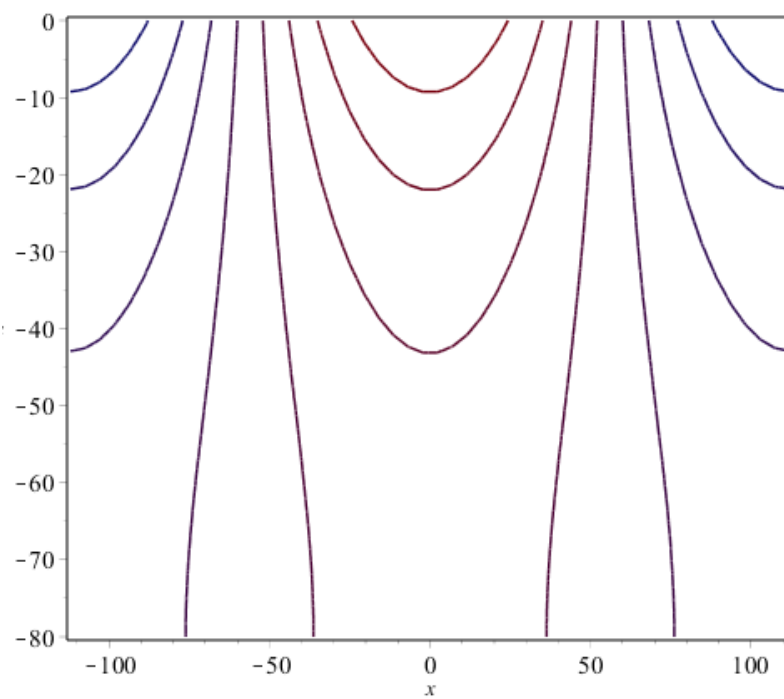


Figura 4.2- Curvas de equipotenciais de velocidade.

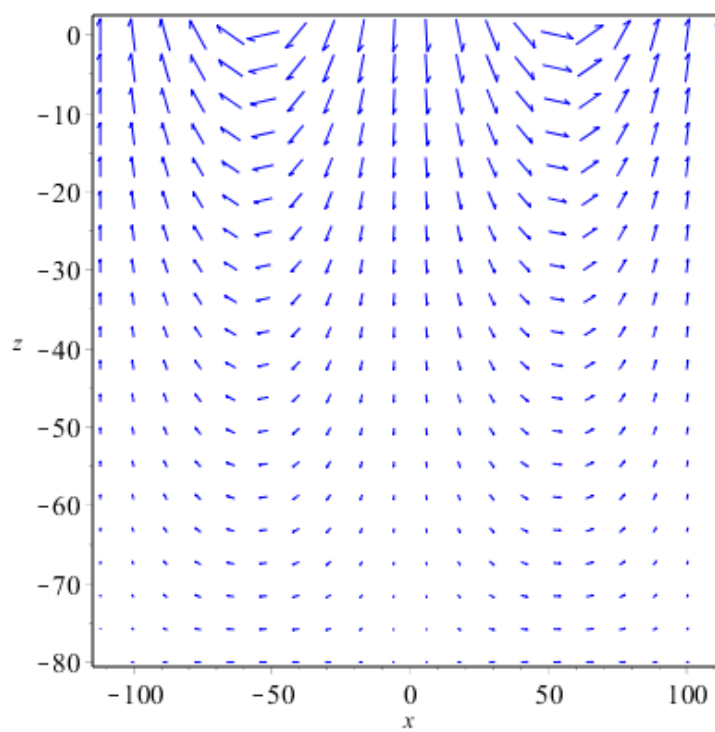


Figura 4.3- Campo dos vetores velocidade para $t=0$, ao longo de um comprimento de onda.

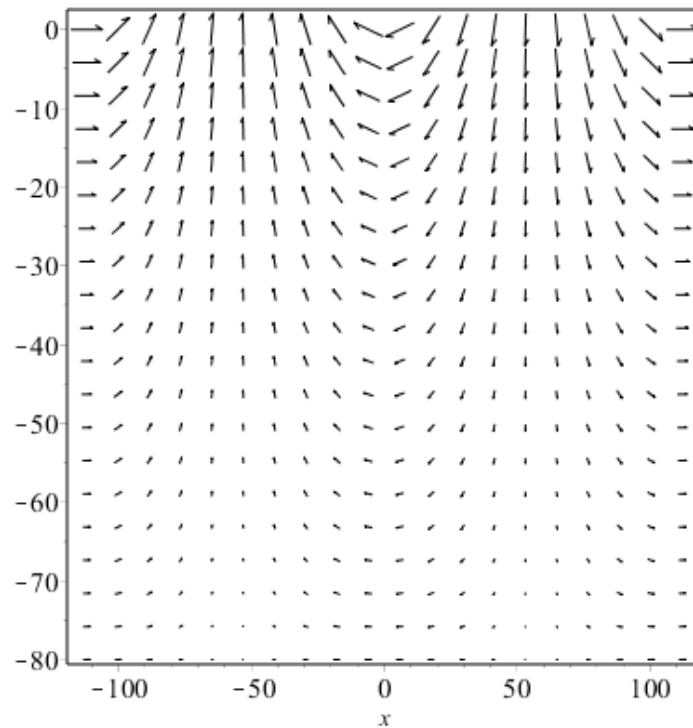


Figura 4.4- Campo dos vetores de aceleração para $t=0$, ao longo de um comprimento de onda.

4.2. Cálculo das forças atuantes na estrutura.

Calculados os valores dos campos cinemáticos é adicionado ao estudo o modelo da estrutura (Figura 3.1) com sua base no ponto $(0, -80)$, onde será engastado um tubo vertical hipotético de 80 metros de comprimento. Com os valores das velocidades horizontais u e das acelerações \dot{u} , é possível calcular a força atuante por unidade de comprimento ao longo da estrutura, sendo assumidos os seguintes parâmetros:

- Diâmetro do tubo (D) = 5 m;
- Coeficiente de arraste (C_D) = 1,2;
- Coeficiente de inercia (C_M) = 2;

Os valores encontrados a partir das equações (2.47 e 2.48) de Morrison para a força inercial e de arraste ao longo do tubo, para $t=0$, são ilustrados na Figura 4.5:

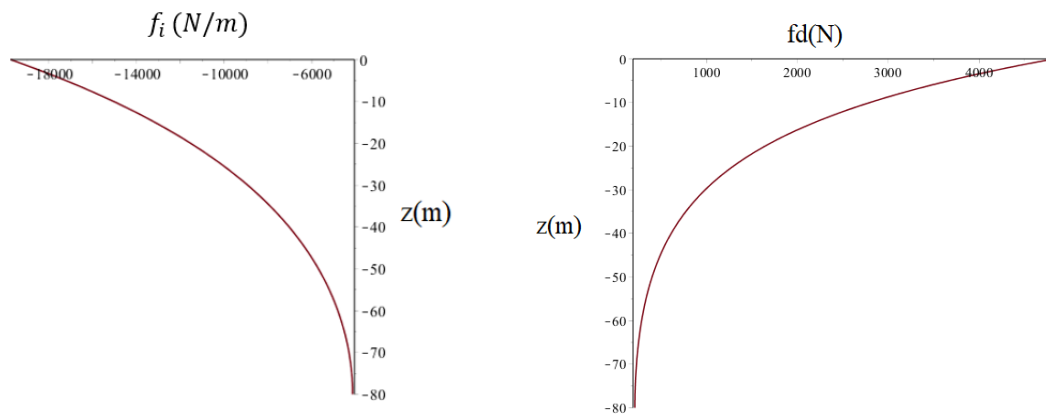


Figura 4.5- Distribuição das forças de arraste e inercial, respectivamente, ao longo do tubo

É interessante descrever também o comportamento dessas forças ao longo do tempo. Na Figura 4.6 ilustra-se a variação temporal da resultante das forças de arraste e de inércia, respectivamente. Observe que as forças alternam de direção ao longo do tempo, impoñto um movimento oscilatório forçada na estrutura tubular. Nota-se ainda que a forças são defasadas ($\pi/2$) entre si e que a força de arraste atinge um pico em 3 s ($t=T/4$), enquanto que a força de inércia é máxima no tempo $t=0$.

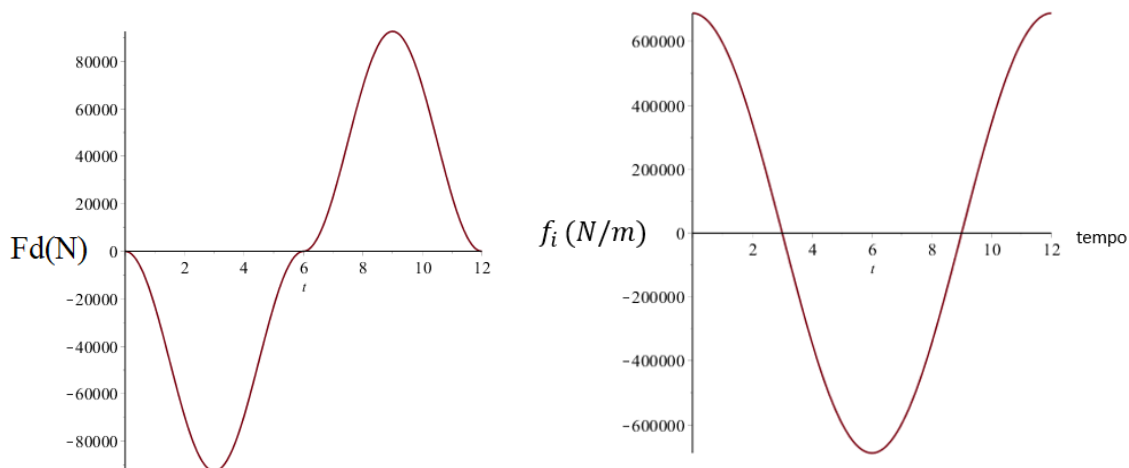


Figura 4.6- Comportamento das forças de arraste e inercial, respectivamente, ao longo do tempo:

D

F_M

A partir dessas forças são calculadas as reações de apoio na base da estrutura, dadas por:

$$R_x = 688,7160349 \text{ kN}$$

$$M = 3.524 \times 10^7 \text{ N/m}$$

Foi criada uma planilha no Excel com os valores dessas forças distribuídas ao longo do tubo e durante a duração de um período de onda (12 s) e esses dados foram inseridos no ABAQUS CAE como um carregamento do tipo tabular. Esses valores são ilustrados na Figura 4.7 abaixo.

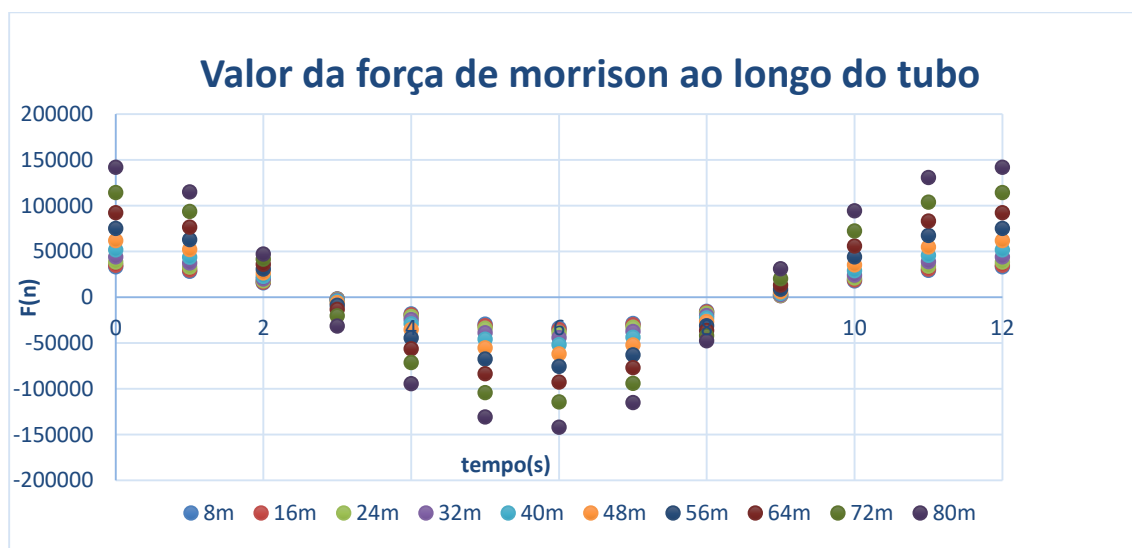


Figura 4.7- Forças aplicada por seção do tubo

4.3. Massa de água adicional

Antes de se calcular o comportamento dinâmico da estrutura, é necessário introduzir uma massa adicional devida à parcela de água deslocada pelo sistema. Essa massa adicional corresponde à massa de água circundante que se move em torno da estrutura.

Segundo PEDROSO (1982) e Chakrabarti (2011), para certas estruturas que estão submersas ou parcialmente submersas sofrendo oscilações, uma certa quantidade da água circundante se move com a estrutura. Essa massa de água deve ser incluída quando se considerar a dinâmica da estrutura. Deve ser lembrado que a água adicional é externa à estrutura, e ainda pode existir

água contida dentro do vazio da estrutura, que obviamente se moverá com a estrutura. Assim, por exemplo, um tubo oco que contém água, tem uma massa efetiva dada por:

- 1) A massa do tubo;
- 2) A massa de água contida dentro do tubo ;
- 3) A massa da água circundante;

A determinação dos itens (1) e (2) não constitui um problema, mas a água circundante é mais difícil de calcular e é altamente dependente na forma geométrica do corpo submerso. O Apêndice [4] apresenta os valores para serem usados em formas que ocorrem frequentemente.

Portanto a massa de água adicional é dada por:

$$m_a = \rho_a \cdot \pi \cdot r^2 \quad (4.2)$$

Assim

$$m_a = 19634.95 \text{ kg}$$

Essa massa adicional foi inserida no modelo juntamente com a massa de água no interior do tubo e sua massa, calculando-se uma densidade equivalente para a estrutura de aço, modificando, assim, as frequências de vibração do tubo e como consequência o espectro de frequência que apresenta perigo de ressonância na obra.

$$\rho_{eq} = 8019.4397 \text{ kg/m}^3$$

4.4. Comportamento dinâmico do tubo engastado.

O tubo foi discretizado, utilizando elementos de casca de 4 nós e integração reduzida (elemento tipo S4R do ABAQUS). A malha é constituída por 320 elementos e um total de 328 nós. Aplicando as forças encontradas no item 4.2, foram obtidos os deslocamentos máximos no topo do tubo. A Figura 4.2 abaixo se apresenta em uma escala de deslocamento 100 para 1 afim de melhorar a visualização dos resultados.

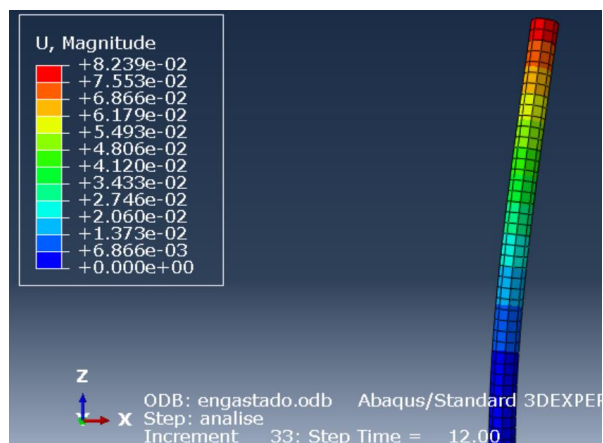


Figura 4.8- Tubo deformado devido ao carregamento das onda

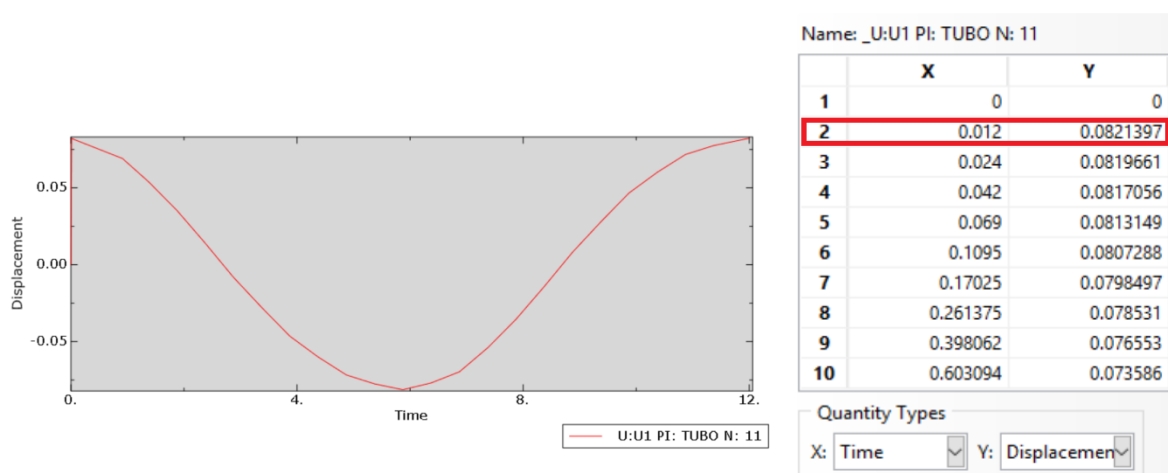


Figura 4.9- Deslocamento no topo do tubo ao longo do tempo e seus valores

O tubo engastado apresenta deslocamentos máximos da ordem de 8 cm, cerca de um milésimo de seu comprimento, seu comportamento ao longo do tempo apresenta comportamento senoidal com o mesmo período da onda incidente como pode ser visto na Figura 4.8.

Considerando que a teoria linear de Airy tem como premissa para seu desenvolvimento teórico ondas de pequenas amplitudes, os deslocamentos máximos apresentados pela estrutura possuem magnitudes razoáveis tendo em vista que o suporte de uma laje de concreto sobre o tubo enrijeceria a estrutura, reduzindo ainda mais essas respostas.

Foi realizada também a mesma análise analiticamente com o auxílio da ferramenta computacional MAPLE cuja massa foi discretizada em três elementos.

As matrizes de rigidez foram obtidas através da referencia de um autor desconhecido com título do capítulo “Lumped and Consistent mass Matrices” , e elaboradas através do apêndice[2] do MAPLE.

O sistema analítico assumido possui então seis graus de liberdade, sendo o primeiro de deslocamento horizontal e o segundo de deflexão angular, cada um dos nós numerados de cima para baixo e o modelo a ser estudado pode ser ilustrado pela Figura 4.10:

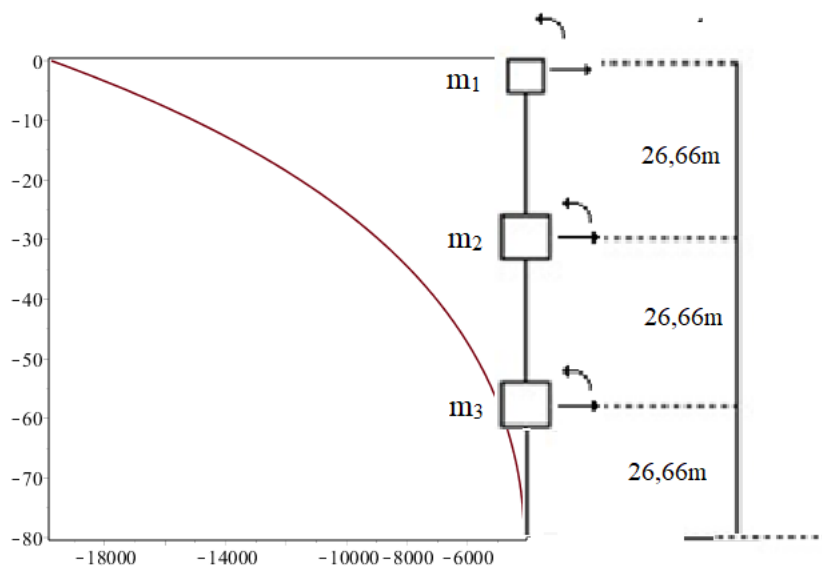


Figura 4.10- Modelo analítico utilizado

Foram calculados os centros de massa da função de força de Morrison entre os intervalos dos elementos e distribuída a força hidrodinâmica de acordo com essas distâncias. Dessa forma o vetor força usado para a análise modal foi:

$$F_e = \begin{Bmatrix} 198,72 \\ 277,61 \\ 153,18 \end{Bmatrix} kN$$

Foram calculados os deslocamentos por meio da superposição modal, Figura 4.11, assim como alguns modos da estrutura. O deslocamento final, conforme a teoria, é a superposição de um cada um dos modos de deslocamento e seu valor máximo obtido foi de 0.06569m, apresentando uma diferença de 15,3% devido às diferenças entre os modelos, na imperfeição da montagem das matrizes de massa e rigidez (parâmetro α) e pelo método de solução. O deslocamento encontrado por elementos finitos está espaçados em $\pi/2$ devido à escolha inicial da equação diferencial feita analiticamente, ter sido do tipo $u_p(t) = X\text{sen}(\omega t)$. Isso não reflete nenhum significado físico.

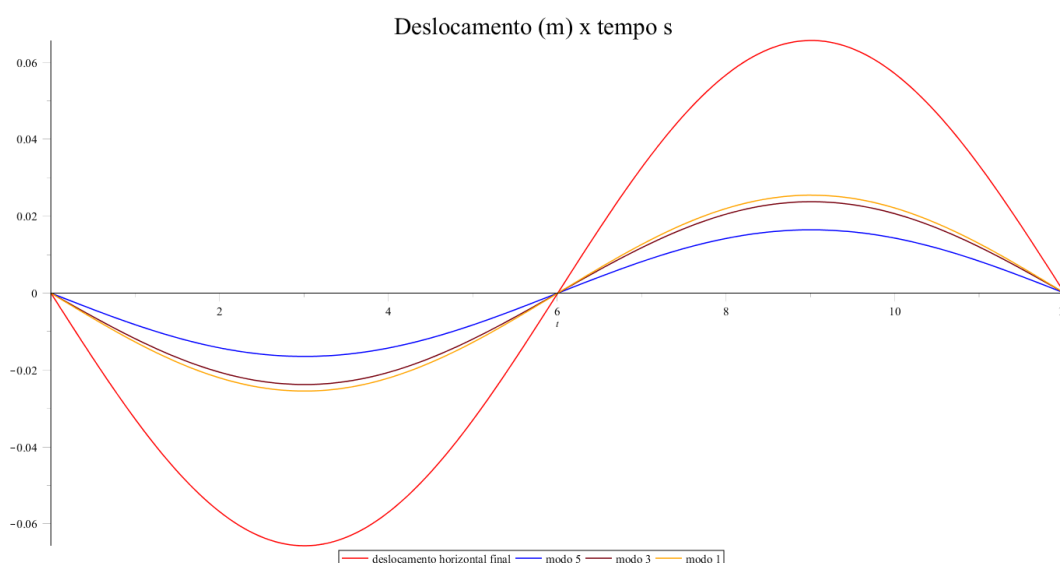


Figura 4.11- Deslocamento calculado utilizando da superposição modal

É realizado então o estudo das frequências de vibração da estrutura e seus respectivos modos. Essas frequências são comparadas entre os modelos analíticos e numéricos e em seguida analisado como é dada a influência do solo na vibração natural do sistema.

Tabela 4-1-Modos encontrados analiticamente e numericamente

	Numérico	Analítico	Diferença (%)
ω_1	0.72718 Hz	0.949 Hz	23,37%
	0.72718 Hz		
ω_2	4.4180 Hz	5.335 Hz	17,18%
	4.4180 Hz		
ω_3	9.6531 Hz	-	
ω_4	11.837 Hz	13.301 Hz	11%

É importante lembrar que devido às incompatibilidades entre os modelos, e como o modelo analítico possui apenas dois graus de liberdade por nó, enquanto o numérico contempla seis, os modos representados por este não são correspondentes aos modos numéricos. Os dois primeiros modos numéricos são equivalentes, porém os deslocamentos são em sentidos diferentes, esses modos de deslocamento são equivalentes ao primeiro modo obtido analiticamente já que esse modelo permite o deslocamento horizontal. O terceiro e quarto modos numéricos são modos rotacionais em dois sentidos diferentes e esses correspondem ao segundo modo analítico que é um modo devido à rotação. O quinto modo numérico é um modo relacionado à torção, e como o modelo analítico não contempla esse tipo de deslocamento ele não consta entre os modos descritos. O sexto modo numérico é equivalente ao terceiro modo encontrado analiticamente, enquanto que os demais modos analíticos não foram captados no espectro de frequência analisado numericamente. Devido a simplicidade do modelo analítico, é comum que o modo mais significativo é o primeiro modo, já que ele pode ser bem representado com apenas três elementos.

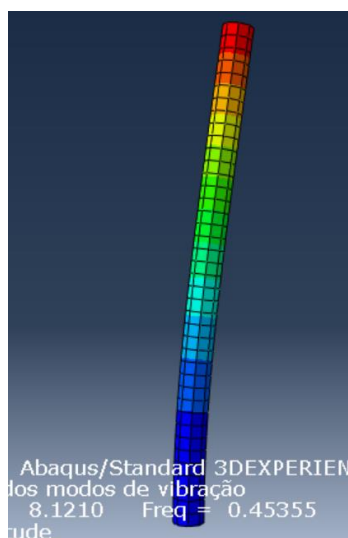


Figura 4.12-Primeiro modo

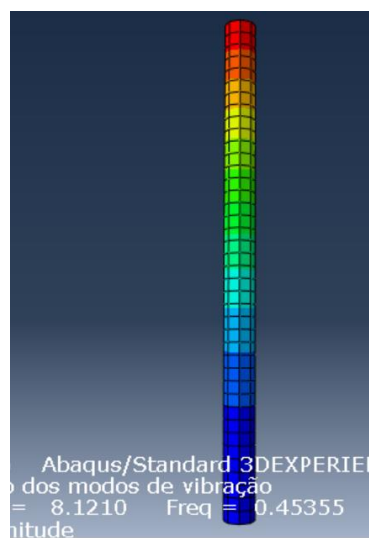


Figura 4.13- Segundo modo.

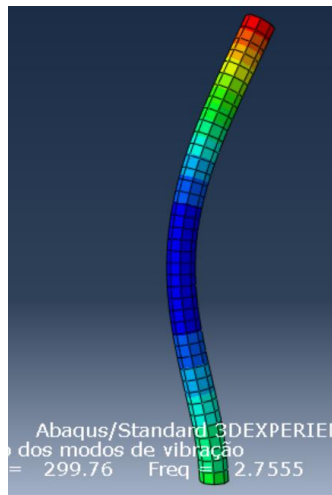


Figura 4.14- Terceiro modo

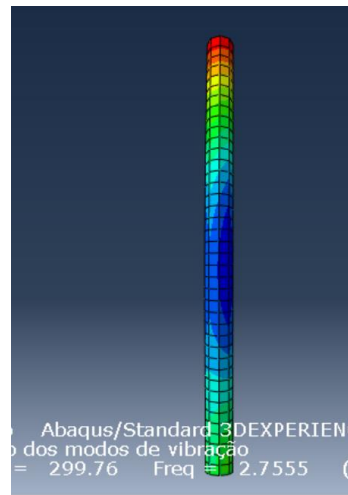


Figura 4.15- Quarto modo

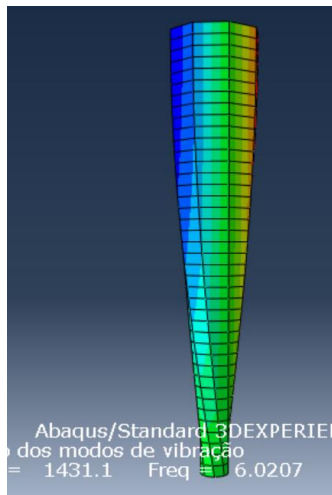


Figura 4.16- Quinto modo

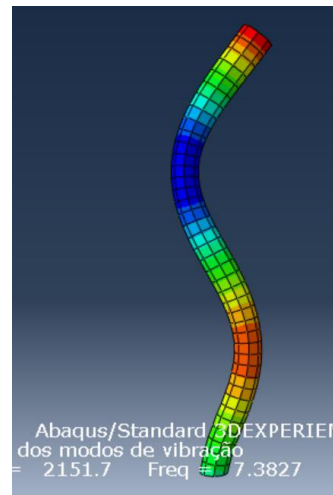


Figura 4.17- Sexto Modo,

Por fim, é feito no ABAQUS uma análise de *steady state dynamics*, por meio da qual se pode perceber quais as faixas de frequência dentro do espectro que são as mais perigosas, gerando grandes amplitudes devido à ressonância.

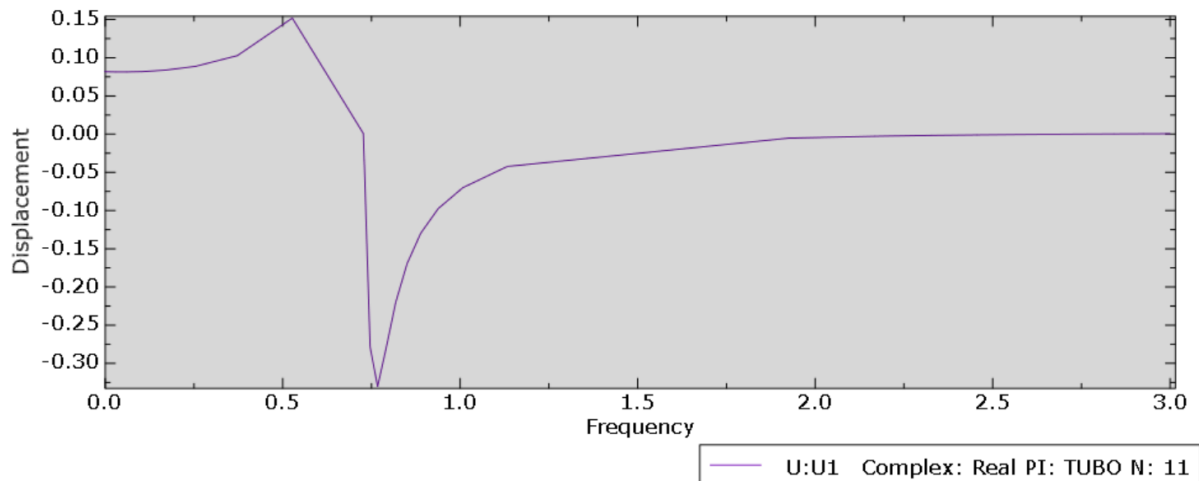


Figura 4.18- Análise Steady State Dynamics pelo ABAQUS.

É importante mencionar que o controle da amplitude durante a ressonância é dado pelo amortecimento, especificado no programa como fator de amortecimento crítico ($c_r = 0.05$) obtido pela equação 2.58 e que o gráfico ilustrado pela ferramenta de plotagem do ABAQUS fornece os valores complexos, sendo necessário assim obter o valor absoluto pelo Excel (Figura 4.19)

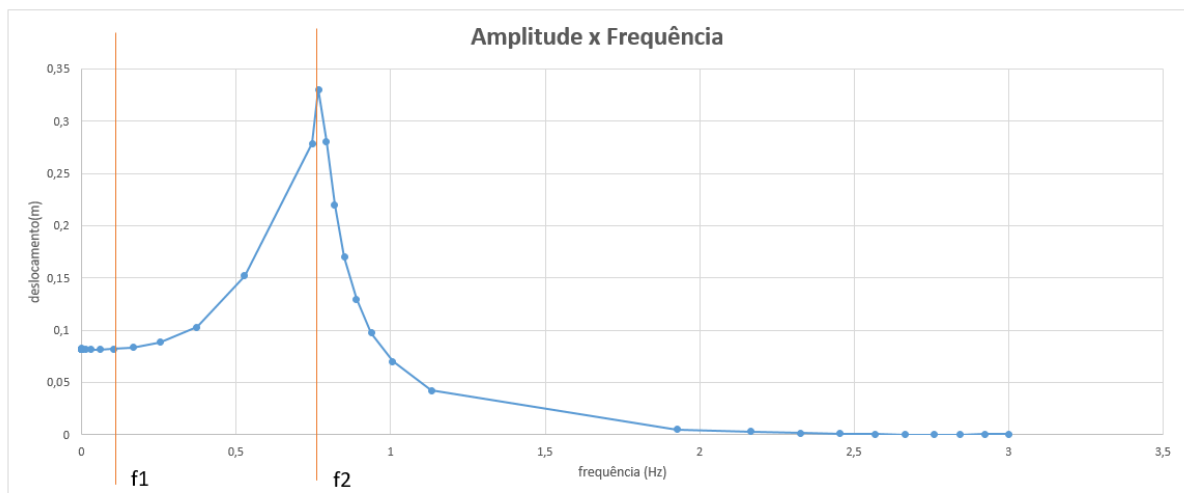


Figura 4.19— Análise Steady State Dynamics no Excel.

É possível então perceber o intervalo de frequências de ondas que fornecem as maiores respostas da estrutura. Frequências entre 0,5 Hz e 0,75 Hz, próximas ao primeiro modo de vibração são as mais perigosas para o modelo em questão. Dessa forma, uma onda com duração

de 12 segundos, ou seja, 0,0833 Hz de frequência forçada se encontra fora da zona de risco para ressonância da estrutura.

4.5. Caso com fundação.

O tipo de fundação escolhida para a estrutura, foi a de uma estaca simples. Essa fundação profunda será do mesmo material do tubo, ou seja, aço.

Primeiramente foi necessário calcular o valor mínimo necessário para a ficha metálica para a sustentação da estrutura baseado em três critérios:

- Critério de segurança contra o deslizamento;
- Critério de segurança contra deslizamento;
- Critério da sustentação vertical;

A Figura 4.20 representa esquematicamente o quadro de forças atuantes na estrutura, e fazendo o equilíbrio de forças verticais, horizontais e o equilíbrio de momento tem-se por satisfeito o equilíbrio estático da estrutura.

Para cálculo dos empuxos de terra, foram considerados os seguintes parâmetros da fundação: peso específico de 18 kN/m³; coeficiente de empuxo de 0,4285.

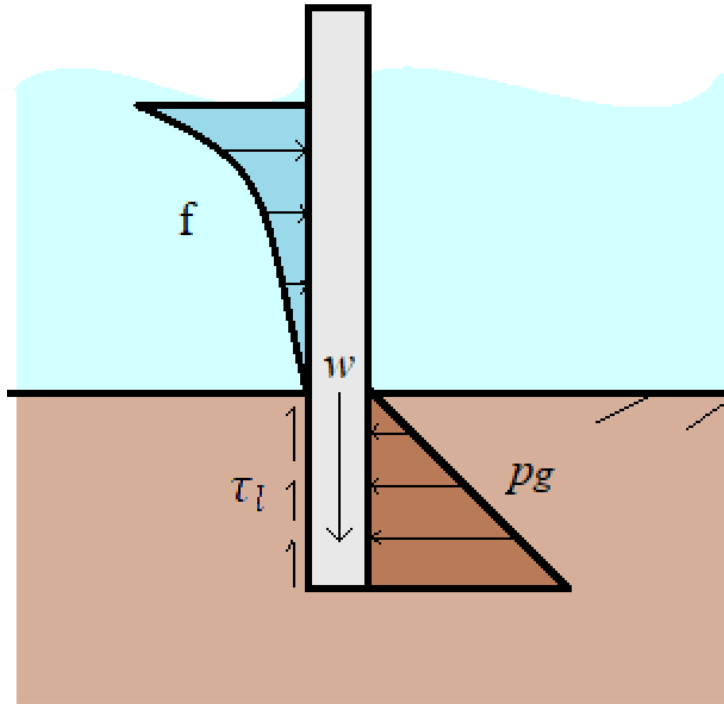


Figura 4.20- Diagrama de corpo livre do tubo.

4.5.1. Critério de segurança contra o deslizamento

Realizando o equilíbrio das forças horizontais obtém-se:

$$\sum F_h = 0 \quad 4.1$$

Ou seja:

$$\int_0^{80} f \cdot dy = \frac{k \cdot l_f^2 \cdot \gamma_g}{2} \quad 4.2$$

Sendo f é a força distribuída de Morrison, k é o coeficiente de empuxo do solo, l_f o comprimento de ficha necessário, e γ_g o peso específico do solo.

Finalmente, obtém-se segundo esse critério que a altura de ficha mínima l_f necessária para garantir a sustentação lateral da estrutura é de 13,36m.

4.5.2. Critério de segurança contra o tombamento

É necessário garantir também o equilíbrio contra o tombamento em torno da base:

$$\sum M = 0 \quad 4.3$$

Trazendo isso para o problema em questão:

$$\int_0^{80} f \cdot y \cdot dy = \frac{k \cdot l_f^3 \cdot \gamma_g}{3} \quad 4.4$$

Assim para o equilíbrio rotacional é necessário que a ficha possua um comprimento mínimo de 14.74m.

4.5.3. Critério da sustentação vertical;

Duas forças aparecem que contribuem para a sustentação vertical do tubo, a primeira é uma força no fuste devido ao atrito e a segunda é uma força concentrada na ponta da peça que somadas devem coincidir com o peso da estrutura para garantir sua sustentação.

$$F_p + F_f = W \quad 4.5$$

Por conservadorismo, a favor da segurança desconsideram-se as forças de ponta e o valor final para o fuste para garantir a sustentação da estrutura é 16.48m.

Esse comprimento de l_f se mostrou o mais crítico dentre os demais. Como esse valor era o valor mínimo necessário para garantir o equilíbrio, é comum se utilizar um fator de segurança de dois ($F_s = 2$) na estrutura, portanto o L final adotado foi de:

$$F_s \cdot l_f \cong 33 \text{ m}$$

4.6. Convergência do domínio.

Em seguida foi estudado a influência do domínio de solo nos resultados mecânicos da estrutura. Primeiramente foi desenvolvido um bloco prismático de solo, mas devido à possibilidade de problemas com reflexões de ondas nas paredes do domínio se optou por realizar esse estudo com domínio solo semi-esférico.

Dessa forma foi realizado um estudo de convergência da malha, afim de escolher a extensão do domínio para o modelo em questão.

Elegeram-se três dimensões para o teste de convergência:

- Semiesfera de raio $r = 180m \cong 6l_f$;
- Semiesfera de raio $r = 270m \cong 9l_f$;
- Semiesfera de raio $r = 360m \cong 12l_f$;

Foi feita a simulação em todos esses domínios e analisado o deslocamento no sentido da força no nó do elemento sólido no pé do tubo, como ilustrado na Figura 4.21. O maciço de solo foi simulado com elementos sólidos tetraédricos com 10 nós (tipo C3D10 no código do ABAQUS). Estes elementos são adequados para o domínio circular e facilitam a discretização com malhas não estruturadas. O uso de funções de forma não lineares, devido aos nós intermediários, melhora a acurácia dos cálculos. A parte enterrada da fundação (fuste) também foi discretizada com elementos sólidos. Neste caso foram usados elementos do tipo C3D8R, ou seja, paralelepípedos de oito nós com integração reduzida. A escolha deste elemento se deu em função da necessidade de compatibilizar o número de graus de liberdade entre os nós do solo e da fundação. Os nós mais externos da calota de solo tiveram os deslocamentos fixados em todas as direções.

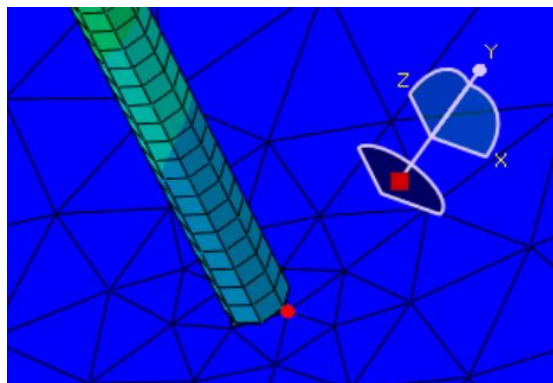


Figura 4.21-Ponto onde foi medido o deslocamento

Traçando o gráfico desse deslocamento horizontal do ponto de controle em função do raio da calota de solo, obtém-se o gráfico de convergência da Figura 4.22:

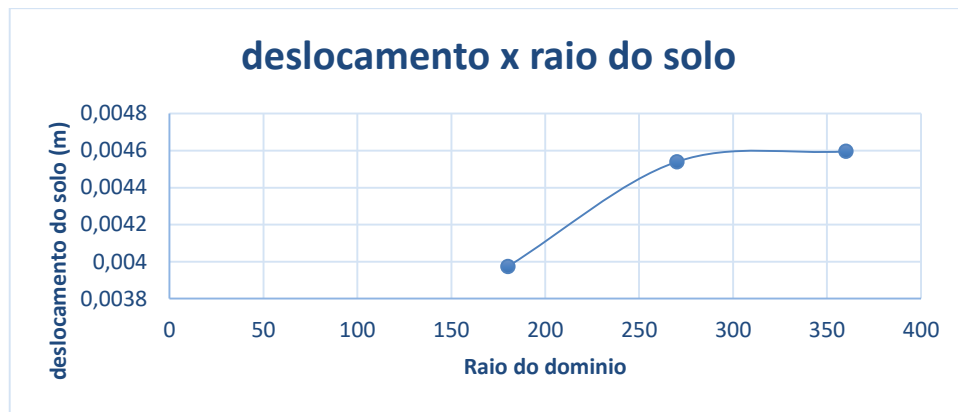


Figura 4.22- Deslocamento x Raio do domínio

Percebe-se que a convergência foi atingida e que a curva tende a um valor assintótico de deslocamento em torno de 0,0046m. A diferença no resultado para a variação no domínio de 270 metros para 360 metros foi de 1.22%. Portanto, foi escolhido trabalhar com 360 metros de raio, tendo em vista diminuir o tempo de simulação e assim o custo computacional. A malha final tinha cerca de 15497 elementos e 3113 pontos nodais.

4.7. Iteração solo estrutura

O comportamento mecânico de estruturas que está em contato com o solo é afetado pela interação entre o solo e a abreviada como SSI. Algumas estruturas onde a SSI é especialmente importante são edifícios, pontes e plataformas de estrutura. Nesta sessão foi estudado um componente carregado lateralmente de uma plataforma petrolífera costeira e, em particular, como modelar o solo para melhor capturar a SSI. O componente está localizado no leito do mar, o que significa que o solo interagindo está completamente submerso.

Nesse trabalho é realizado um estudo elástico dessa SSI, assim não será estudado plasticidade nesse caso. As características do solo utilizado na simulação foram valores usuais para uma areia marinha e estão descritos abaixo:

- Densidade do solo $\rho_g = 1833 \text{ kg/m}^3$;
- Modulo de elasticidade $E_g = 70 \text{ MPa}$;
- Coeficiente de Poisson $\nu_g = 0.25$;

A iteração solo-estrutura foi descrita no ABAQUS com duas parcelas, a primeira dela é a componente tangencial gerada pelo atrito lateral do fuste com solo, essa iteração é a que dificulta o deslizamento vertical do fuste no interior do solo. Foi utilizado uma formulação de fricção por penalidade e o valor adotado para o coeficiente de fricção foi de 0.5 para evitar o arrancamento do tubo.

A segunda iteração é dada pelo contato da ponta do tubo e o solo. Embora a resistência de ponta tenha sido desconsiderada no cálculo do equilíbrio vertical, ainda é necessário a especificação para que o programa entenda o tipo de contato que existe entre essas superfícies.

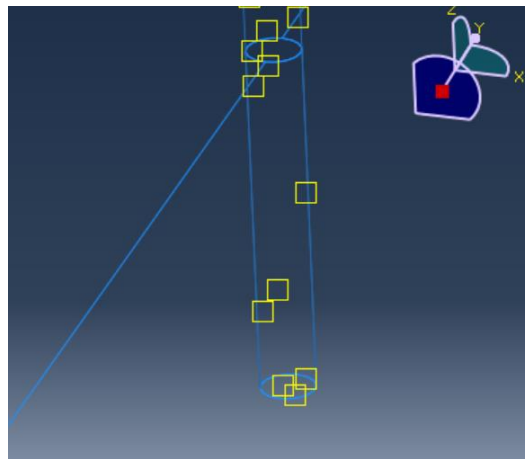


Figura 4.23- Iteração representada segundo ABAQUS.

4.8. Estudo da influência do solo

Apresenta-se a simulação do modelo com a calota de solo de 360m de raio, e as cargas obtidas com o auxílio MAPLE, para a obtenção dos deslocamentos finais da estrutura. Os deslocamentos máximos se dão na ponta do tubo de aço, como ilustrado na Figura 4.24

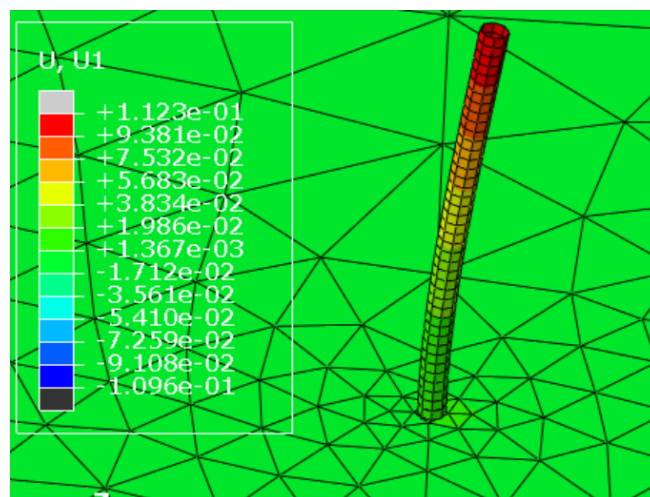


Figura 4.24- Ordem dos deslocamentos no modelo tubo-solo.

Os deslocamentos no topo do tubo ao longo do tempo para um ciclo de carregamento da onda são ilustrados na Figura 4.24. Os valores numéricos podem ser vistos na tabela inserida à direita da figura. Observa-se que a resposta é senoidal e em fase com o carregamento.

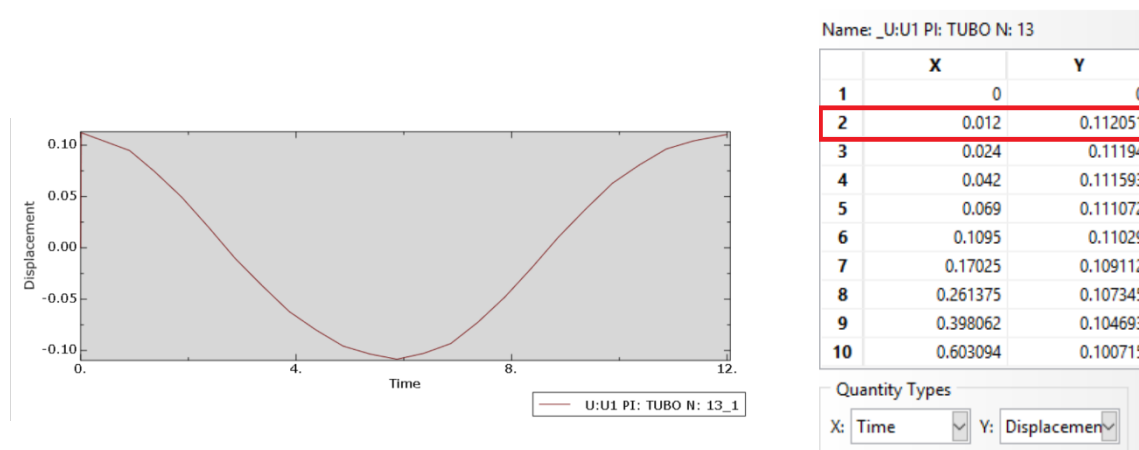


Figura 4.25- Deslocamento no topo do tubo ao longo do tempo e seus valores

Analisando os deslocamentos do tubo é possível perceber que sua resposta em relação ao tempo é semelhante à obtida com o modelo engastado. Porém os deslocamentos foram amplificados devido às diferentes condições de contorno e a baixa rigidez do solo marítimo.

Foi realizado em seguida um estudo sobre a influência do módulo de elasticidade do solo no deslocamento final da estrutura. Assim variou-se a rigidez relativa (E_g/E_a) e foram obtidos os respectivos deslocamentos máximos no topo do tubo (Figura 4.25). Foi realizado o mesmo procedimento e medido o deslocamento no solo localizado na base do tubo (Figura 4.26).

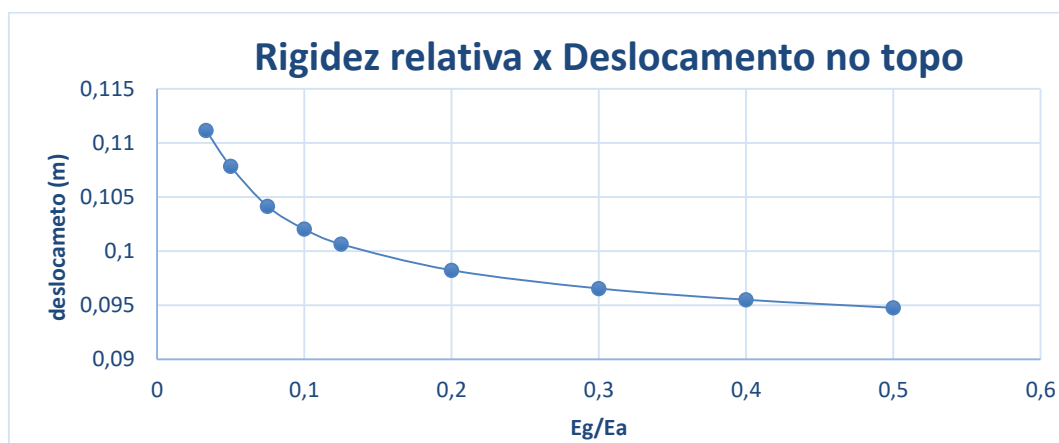


Figura 4.26- Relação entre o módulo de elasticidade do solo e o deslocamento máximo.

Pode-se perceber que ao aumentar a rigidez do solo, o deslocamento final da estrutura, naturalmente, diminui. É possível extrapolar que para uma rigidez e um coeficiente de fricção fuste-solo infinita, o deslocamento final se equipare ao deslocamento analisado no tubo engastado, ou seja, 0,082m.

Os deslocamentos na base do tubo, ilustrados na Figura 4.26, são cerca de 25 vezes menores que aqueles no topo do tubo e também tendem para um valor assintótico à medida que a rigidez da fundação aumenta.

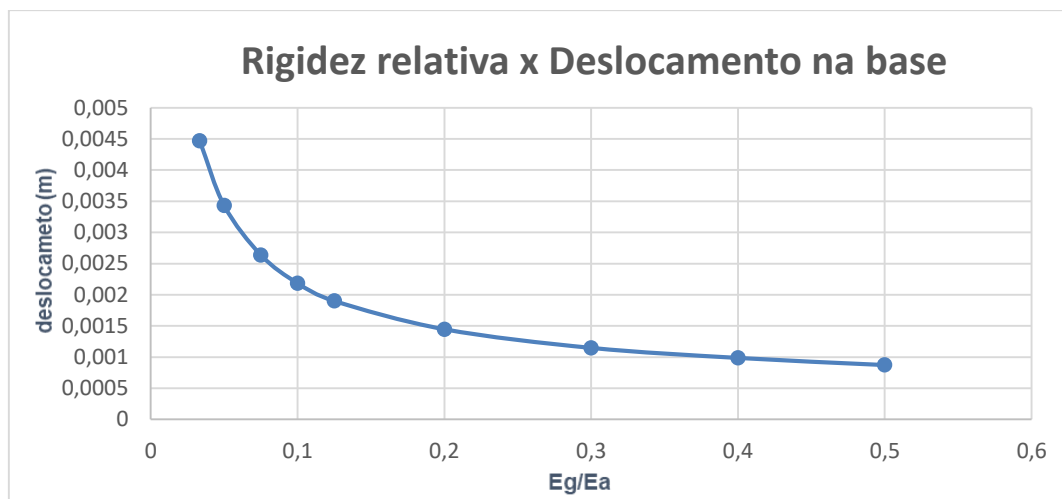


Figura 4.27-- Relação entre o módulo de elasticidade do solo e o deslocamento na base

4.8.1. Modos de vibração

Nessa mesma simulação foram obtidos os novos modos e suas respectivas frequências de vibração para o modelo solo-estrutura. Devido à proximidade das frequências de vibrações foram calculados os dez primeiros modos do conjunto, os quais estão descritos na Tabela 4.2

Tabela 4-2 .Frequências acopladas e frequências naturais do solo.

	Frequências acopladas	Frequências do solo
ω_1	0,20324 Hz	0.20330 Hz
ω_2	0,21320 Hz	0.21324 Hz
ω_3	0,21324 Hz	0,21239 Hz
ω_4	0,24468 Hz	0.24468 Hz
ω_5	0,24749 Hz	0,24758 Hz
ω_6	0,24761 Hz	0,24767 Hz
ω_7	0,29576 Hz	0,29576 Hz
ω_8	0,29581 Hz	0,29581 Hz
ω_9	0,31601 Hz	0,31601 HZ
ω_{10}	0,31609 Hz	0,31609 Hz

Comparando as frequências naturais do modelo com o tubo acoplado, as frequências naturais do solo e as do tubo engastado é possível observar a dominância dos modos do solo no modelo acoplado. A presença da estrutura apresenta maior influência nos modos iniciais, principalmente o terceiro, e perde sua importância nos últimos modos analisados.

Em comparação ao modelo engastado, com a acoplamento é possível perceber a influência da fundação nos modos do conjunto. Os novos modos possuem frequências bem mais baixas e bem mais próximos umas das outras. Estes modos estão ilustrados nas figuras 4.27 a 4.32.

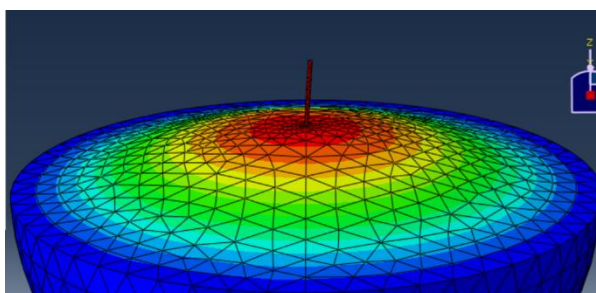


Figura 4.28- Primeiro modo.

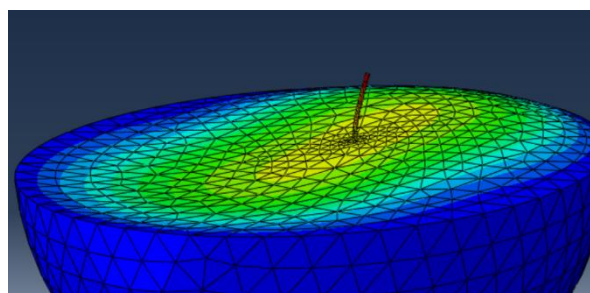


Figura 4.29- Segundo Modo

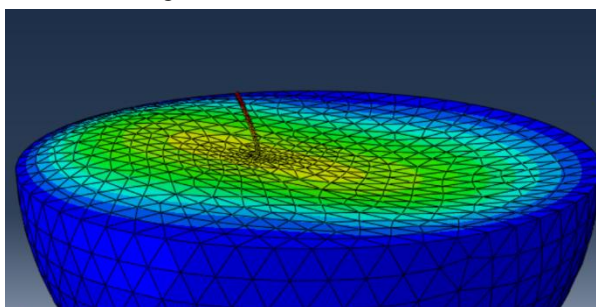


Figura 4.30- Terceiro modo

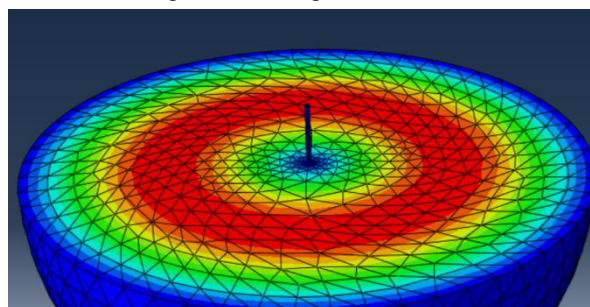


Figura 4.31- Quarto modo

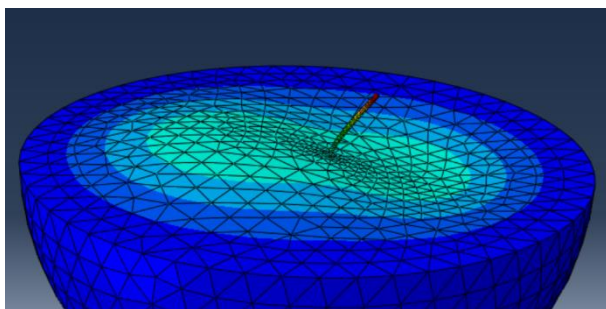


Figura 4.32- Quinto modo.

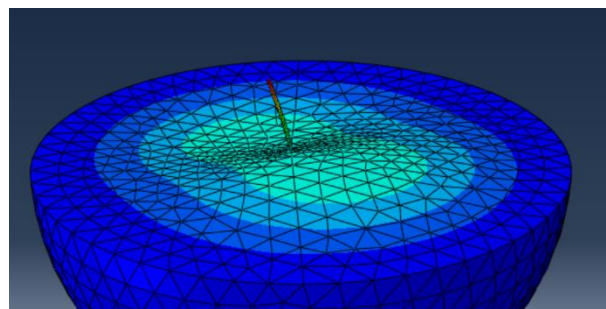


Figura 4.33- Sexto modo.

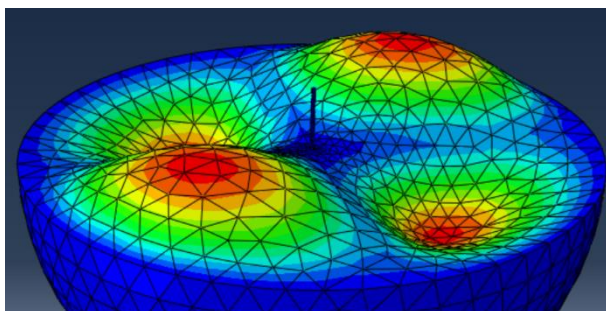


Figura 4.34- Setimo modo

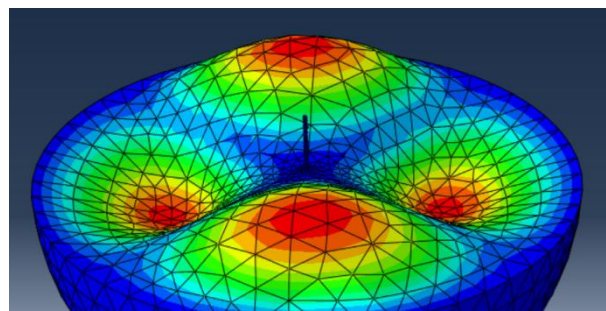


Figura 4.35- Oitavo modo

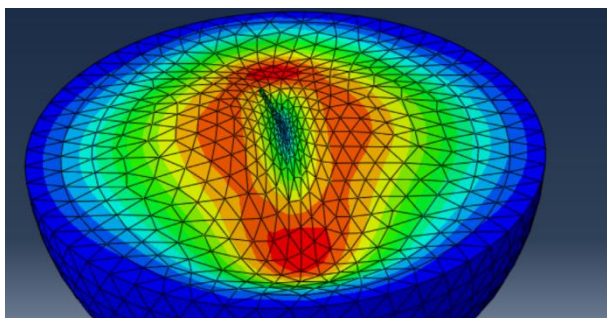


Figura 4.36- Nono modo

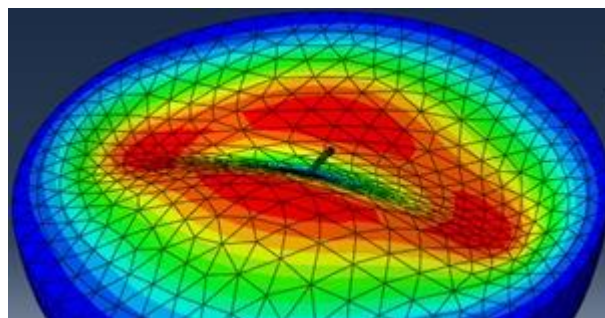


Figura 4.37- Décimo modo

Após a obtenção dos modos, foi realizada novamente uma análise de *steady-state dynamics* assim como no modelo engastado. Dessa forma é possível determinar, por exemplo, o deslocamento máximo no topo do tubo em função da frequência atuante e assim investigar para qual intervalo a estrutura apresenta maiores respostas.

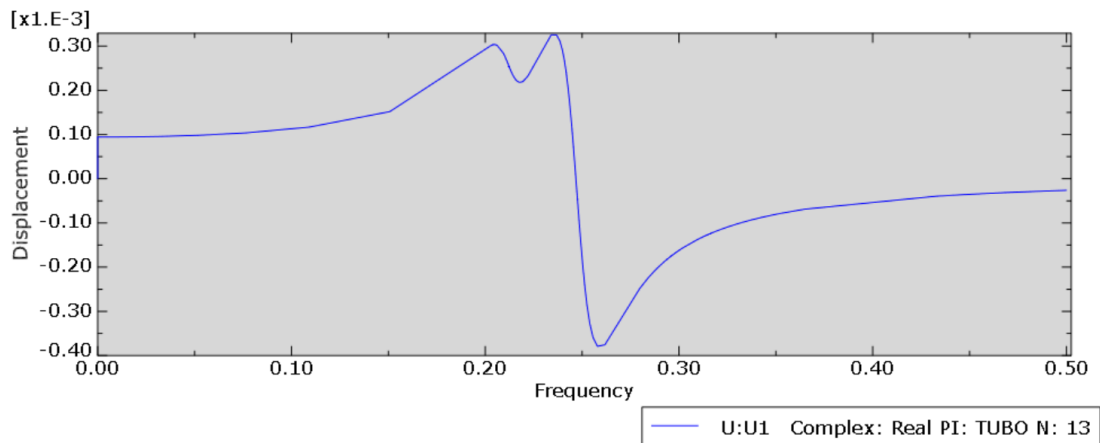


Figura 4.38- Análise Steady State Dynamics no ABAQUS.

A Figura 4.37 acima apresenta os deslocamentos em metros do topo da estrutura, porém como no caso engastado é demonstrado na equação 2.85, utilizando a razão das frequências e das amplitudes, é necessário obter o módulo desses deslocamentos para que se tenha algum significado físico relevante. Obtém-se assim o gráfico da Figura 4.38.

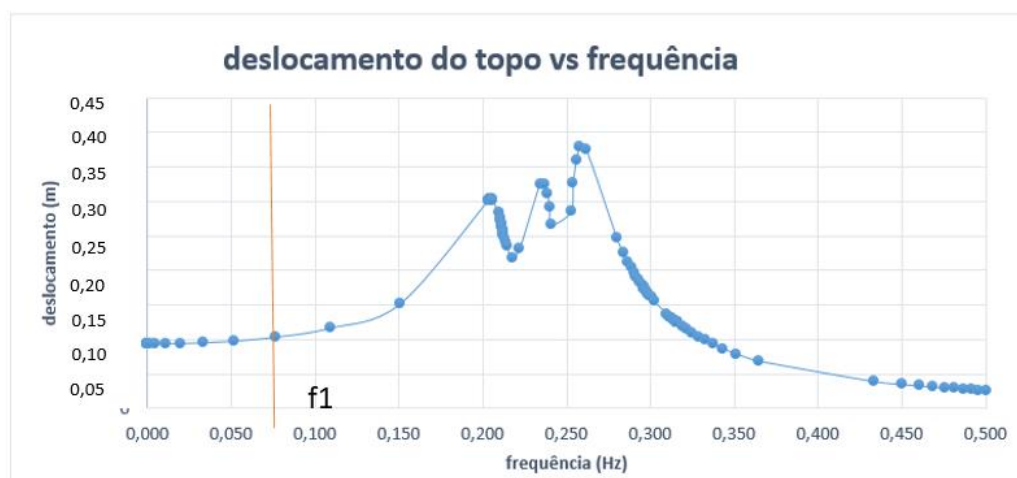


Figura 4.39- Análise Steady State Dynamics no Excel.

Devido à proximidade das frequências naturais, existe uma maior dificuldade de analisar os deslocamentos dentre o intervalo de 0,2 e 0,3 Hz, mas é possível perceber que esse intervalo é o mais grave em termos de deslocamentos máximos e ressonância no sistema. E novamente a

frequência forçada (f_1) no sistema de 0,0833Hz se mostrou num intervalo de segurança para a estrutura.

5. CONCLUSÃO

Este capítulo apresenta as conclusões do estudo, onde tinha como objetivo o cálculo da resposta dinâmica da estrutura a partir das solicitações mais frequentes de uma plataforma offshore de petróleo. Nesse sentido verificou-se que os objetivos foram atingidos, como também a metodologia foi validada comprovando a hipótese adotada.

O Neste trabalho foi apresentada uma formulação matemática simplificada para a análise de estruturas *offshore* sujeitas a vibrações forçadas geradas por ondas progressivas. O movimento das ondas foi simulado de acordo com a teoria linear de Airy e as forças atuantes em um tubo rígido foram calculadas de acordo com o modelo de Morrison que divide as solicitações em uma parcela de força de arraste e outra de força inercial.

Também foi apresentada uma revisão geral do estudo de movimentos dinâmicos livres e forçados para os casos amortecidos e não amortecidos. A teoria foi apresentada inicialmente para um único grau de liberdade. Para o caso de múltiplos graus de liberdade, o problema é tratado analiticamente, usando a teoria de decomposição modal que permite o desacoplamento do problema, que fica equivalente a vários graus de liberdade tratados individualmente como nos casos de um sistema simplificado massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade.

A teoria foi aplicada a um estudo de caso hipotético. Para tanto, foi fundamental o uso do software Maple, o qual usa álgebra simbólica e permite a dedução analítica de todas as equações do problema. O programa também faz os cálculos numéricos e fornece uma ampla biblioteca de representação gráfica dos resultados.

Os resultados obtidos no estudo analítico se mostraram coerentes com todos os aspectos teóricos e numéricos, demonstrando que a abordagem utilizada, apesar de simplificada, é satisfatória para um tratamento preliminar do problema;

A teoria de Morrison se mostra aplicável, porém para estruturas mais robustas onde a estrutura influencia no comportamento mecânico da onda é necessário partir para teorias mais complexas como a da refração de ondas e *breaking waves*.

Análise mais complexas também foram realizadas, utilizando-se o método dos elementos finitos com o auxílio do programa ABAQUS. Inicialmente foi analisado o caso de um tubo totalmente engastado. Os valores de deslocamento e os modos de vibração calculados numericamente foram compatíveis com os obtidos analiticamente por decomposição modal, resguardadas as diferenças naturais devidas à natureza das abordagens e diferentes níveis de discretização utilizados.

Posteriormente foi investigado o problema de interação solo estrutura. O solo foi tratado como um sólido elástico e a adoção de um domínio semi-esférico provou ser uma medida simples e efetiva para evitar problemas de reflexão de ondas no contorno para o problema em estudo.

Foi realizado um estudo de convergência da malha e demonstrou-se que um domínio com um raio de 12 vezes o comprimento do fuste é suficiente para a estabilização dos deslocamentos.

Os deslocamentos obtidos no topo do tubo variam com a razão entre a rigidez do solo e da estrutura e convergem para os valores do modelo engastado à medida que a rigidez da fundação tende ao infinito.

Foi possível determinar os modos de vibração da fundação e como estes modos influenciam na vibração da estrutura.

Ainda com o auxílio do programa ABAQUS também foram realizadas análises do tipo *steady-state dynamics*. Desta forma foi possível determinar o intervalo, o mais perigoso em termos de deslocamentos máximos e a frequência de ressonância no sistema e comparar esta com a frequência forçada imposta pelo carregamento das ondas de Airy. Em todos os casos analisados verificou-se que a estrutura trabalhava em um intervalo de segurança.

O ABAQUS se comprovou uma poderosa ferramenta para a simulação desse tipo de problemas, sendo o programa equipado para a simulações de maior complexidade, envolvendo também a plasticidade do solo e vários outros aspectos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS. User's manual. Version 6.13. Em <https://www.sharcnet.ca/Software/Abaqus/6.11.2>. Acessado em 22/01/2017.

ALVA, F. G. Análise do comportamento de radier estaqueados com estaca defeituosa carregados horizontalmente em solo tropical. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, D.F. 169p., 2017

CHAKRABARTI, S. K. Advanced series on ocean engineering v. 20: The Theory and Practice of Hydrodynamics and Vibration. World Scientific: Cingapura, 2002. [20]
CHEMTECH. Curso Web OGM: Módulo 1: Apostila teórica offshore. Maratona nacional Chemtech de engenharia, 2011.

COLLANTES, C. A. P. Avaliação da Influência da Posição da Estaca Integrando um Radier Estaqueado em sua Capacidade de Carga Lateral. Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia Departamento de Engenharia Civil e Ambiental - UnB-FT/ENC, Abril 2017.

DEPARTMENT OF ARMY. Shore Protection Manual, Coastal Engineering Research Center. Washington DC, 1984

FERREIRA, J. L. Um Estudo de Ações Dinâmicas em Plataformas Offshore Utilizando Dinâmica dos Fluidos Computacional. Monografia de Projeto Final, UnB-FT/ENC, Outubro 2012.

FRENCH, A.P. Vibrations and Waves DEPARTMENT OF ARMY. Shore Protection Manual, Coastal Engineering Research Center. Washington DC, 1984. The Massachussets Institute of Technology, USA. 1971.

Heal, K. M., Hansen, M., Rickard, K., Maple V Learning Guide, Springer-Verlag, New York, 1997.

ISI ENGENHARIA. O mundo das plataformas de petróleo. Disponível no site <http://www.isiengenharia.com.br/wordpress/espaco-do-engenheiro/o-mundo-das-plataformas-de-petroleo-2>. Acessado em 12/11/2017.

Lumped and Consistent mass Matrices. **Disponível em:** - <http://www.aprh.pt/rgci/glossario/ondasmarinhas.html>. Acessado em 22/11/2017

MAPLESOFT. 2009. Maple 13, student edition [programa de ordenador]. Waterloo, Ontario: Maplesoft. CD-ROM, S.O. Linux, Mac y Windows.

MARTINEZ M. A. B. Projeto de estruturas Marítimas. Nota de aula disponível no site <http://www.lem.ep.usp.br/pef418/onda.pdf>. Acessado em 10/10/2017.

MASON, Jayme. Obras portuárias. Rio de Janeiro: Elsevier. 1981.

MELLO, M. H. P. L. ; VILCHES, Maurício Alejandro . Aplicações de Integral Definida. Maple Para Cálculo Em Uma Variável. Rio de Janeiro: Ed do Autor, 2011, v. , p. 217-256.

PEDROSO, L. J. Alguns aspectos da interação fluido-estrutura em estruturas offshore. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1982, 340p. Tese (Mestre em estruturas), Programa de engenharia civil, UFRJ, Rio de Janeiro 1982.

PEDROSO, L.J. Introdução a Dinâmica das Estruturas. Publicação didática (Apostila interna), UnB-FT/ENC, Setembro 1998

Petronotícias. Agência Internacional de Energia: Equilíbrio no Mercado do Petróleo apesar do Aumento da Produção do Xisto Disponível em: <https://petronoticias.com.br/archives/109587>. Acessado em 20/06/2018.

STROMBLAD, N. Modeling of Soil and Structure Interaction Subsea.2014.

SILVA, S. Notas de Aulas Vibrações Mecânicas, Foz do Iguaçu, 2009.

TASSINARI, C. C. G.; SANT`ANNA, L.G.; RICCOMINI, C. Pré-Sal: Geologia e Exploração. Revista USP. São Paulo, nº 95, pg 34 - 42 ISSN: 2316-9036 - 2012

APÊNDICE 1 – ONDA DE AIRY E ESFORÇOS DE MORRISON

Esta Planilha é baseada no Livro do Mason e segue a sua nomenclatura de variáveis

Nesta primeira seção são colocadas as fórmulas e deduções gerais

Expressão da Função Potencial de Velocidades (solução da Eq de Laplace + Condições de Contorno)

Chocar a expressão da Função Potencial !!!!

Nesta seção são calculadas as velocidades horizontal (u) e vertical (w), Equações (2.1.1-3 (a) e (b))

> restart:

$$\varphi := -\frac{\pi \cdot g}{\sigma} \cdot \frac{\cosh(k \cdot (h + z))}{\cosh(k \cdot h)} \cdot \cos(k \cdot x - \sigma \cdot t);$$

Derivação das expressões das velocidades horizontal e vertical (gradiente)

$$u := \frac{\partial}{\partial x} \varphi;$$

$$w := \frac{\partial}{\partial z} \varphi;$$

>

Cálculo da pressão (equações 2.1.3-1 e 2.1.3-2)

γ é uma letra reservada (é preciso declarar como local)

p_g é a pressão hidrostática: p_o é a pressão para o nível $z=0$

> local γ

$$p := \gamma (K_p \cdot \eta - z);$$

$$\gamma := \rho \cdot g;$$

$$K_p := \frac{\cosh(k \cdot (h + z))}{\cosh(k \cdot h)};$$

$$p_g := \gamma (-z + \eta);$$

$$p_o := -\gamma z$$

Cálculo das forças por metro linear num tubo (primeiro a aceleração horizontal)

$$a_x := \frac{d}{dt} u;$$

> local D:

$$f_D := C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot D \cdot u \cdot \text{abs}(u); \quad f_M := -C_M \cdot \rho \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{4} \cdot a_x; \quad f := f_D + f_M$$

Cálculo dos tempos quando as forças atingem valores máximos

$$x := 0; \quad t_D := \text{solve}\left(\frac{\partial}{\partial t} f_D = 0, t\right); \quad t_M := \text{solve}\left(\frac{\partial}{\partial t} f_M = 0, t\right);$$

Cálculo das resultantes:

>

$$F_D := \int_{-h}^0 f_D dz$$

$$> F_M = \int_{-h}^0 f_M dz$$

Cálculo dos momentos resultantes:

Momento de arrasto

$$> M_D = \int_{-h}^0 (z + h) \cdot f_D dz$$

Momento de forças inerciais

$$> M_M = \int_{-h}^0 (z + h) \cdot f_M dz$$

>

> assign('x'):

Expressão de uma onda superficial

$$> \eta := a \cdot \cos(k \cdot x - \sigma \cdot t):$$

$$> k := \frac{2 \cdot \pi}{L}: \quad \sigma := \frac{2 \cdot \pi}{T}: \quad C = \frac{L}{T}:$$

Forneca os dados entrada:

T: é o período da ondedo em s (segundos):

h: é a profundidade do fundo do mar, dada em m (metros):

g: é a aceleração da gravidade em m/s²

Com estes dados o comprimento da onda é calculado de acordo com equação (2.1.1-7)

$$> T := 10.0:$$

$$> h := 50.0:$$

$$> g := 10.0:$$

$$> \text{solve}\left(L = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{L}\right), L\right):$$

$$> L_0 := 153.8792029:$$

Verificando para o valor positivo de L.

$$> L := \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{L_0}\right):$$

$$> k: \quad \sigma: \quad C:$$

Calcular e verificar a celeridade da onda (equações 2.1.4 e 2.1.1-5)

$$> C_1 = \frac{g \cdot T}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{L}\right):$$

$$> C_2 = \frac{\sigma}{k}:$$

Entre a altura da onda (Pergunte ao Linxu como avalia) em m (metros)

$$> H := 6:$$

```

>  $\alpha := \frac{H}{2}; \quad \eta;$ 
Plote a onda no tempo t=0
>  $t := 0; \quad \text{ondas} := \frac{1}{k};$ 
>  $\text{plot}\left(\eta, x=0 - \frac{2 \cdot \pi}{k}, \text{scaling}=\text{constrained}\right);$ 
Verifica se a onda é de primeira ordem
> if  $\frac{H}{L} < 0.05$  then
  print("H/L=",  $\frac{H}{L}$ )
  print("A onda atende à teoria de Airy")
else
  print("H/L=",  $\frac{H}{L}$ )
  print("A onda atende não à teoria de Airy")
end if;
Plota o campo vetorial de deslocamentos
> with(plots):
>  $\text{fieldplot}\left([u, w], x=-\frac{\pi}{k} .. \frac{\pi}{k}, z=-h..0\right);$ 
  fundo sei como colocar a onda na superfície
Entre os parâmetros da água:
ρ é densidade da água em kg/m3:
>  $\rho := 1025;$ 
Plota as pressões com a profundidade
>  $t := 0; \quad x := 0; \quad Ppx := \text{multiple}\left(\text{plot}\left[p, z=-h..0\right], \left[\gamma(-x), z=-h..0\right], \left[\gamma(-x+\eta), z=-h..0\right]\right); \quad \text{plottools} := \text{rotate}(Ppx, \text{Pi}/2);$ 
>  $\text{unassign('t')}; \quad p;$ 
>  $\text{plottools} := \text{rotate}\left(\text{animate}\left(\text{plot}\left[\left\{p, p \cdot \gamma(-x+\alpha), \gamma(-x-\alpha)\right\}, z=-h..0\right], t=0..5 \cdot T\right), \text{Pi}/2\right);$ 
>  $\text{unassign('t')}; \quad \text{unassign('x')};$ 
Entre os dados do tubo
D é o diâmetro todo em metro (com D/L<0.05): usei local D pq D é protegido
CD é o coeficiente de arrasto (adimensional):
CM é o coeficiente de inércia (adimensional):

```

(1)

```

> D := 0.90:
> CD = 1.05:    CM = 1.40:
> x := 0:    t := tM:    fM:
> PjM = plot(fM x--h..0):
> plottools:-rotate(PjM, P1/2):
> t := tD:    PjD := plot(fD x--h..0):
> plottools:-rotate(PjD, P1/2):

> unassign('f):
> plot(FD t=0..T):
> plot(FM t=0..T):
> plot(MD t=0..T):
> plot(MM t=0..T):
> t := tM:    print("FM=", FM):    t := tD:    print("FD=", FD):
> t := tM:    MM:    t := tD:    MD:
>

```

(2)

APÊNDICE 2 – MATRIZES DE RIGIDEZ E DE MASSA GLOBAIS

```

> restart;
> with(LinearAlgebra) :
>
Solução de um problema de um viga engastada sujeita
Por MEF

Começando com apenas dois elementos
n é o número de elementos
rho é massa distribuída kg/m
L é o comprimento total da viga
E é o módulo de Young do material da viga (pode dar as dimensões)
I é o momento de inércia

Ke dá a expressão genérica da Matriz de Rigidez de um elemento de viga

Me é a matriz de massa diagonal para uma viga plana Bernoulli-Euler. Ver http://kis.tu.kielce.pl/mn/COLORADO\_FEM/colorado/IFEM.Ch31.pdf (Eq.31.17)

> Ke :=  $\frac{2 \cdot E \cdot I_e}{l_e^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 \cdot l_e & -6 & 3 \cdot l_e \\ 3 \cdot l_e & 2 \cdot l_e^2 & -3 \cdot l_e & l_e^2 \\ -6 & -3 \cdot l_e & 6 & -3 \cdot l_e \\ 3 \cdot l_e & l_e^2 & -3 \cdot l_e & 2 \cdot l_e^2 \end{bmatrix}$  : Me := rho \cdot Area \cdot l_e
      \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \cdot l_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \cdot l_e^2 \end{bmatrix}

```

Entra os dados
alpha deve ser entre (0, 1/50]

```

> nElem := 2; E := 10^7; Ie :=  $\frac{2.0}{3.0}$ ; L := 60.; Area := 1.0; rho := 1.0; alpha :=  $\frac{1.0}{50}$ ;
> LE := Matrix(1, nElem, E): LE:
> LI := Matrix(1, nElem, Ie):
>
> LI := Matrix(1, nElem,  $\frac{L}{nElem}$ ):
Corrija os comprimentos iniciais se não forem iguais
> LI[1,1] := 20.0; LI[1,2] := 40.0; LI:

```

> ndof := 2 \cdot (nElem + 1)

Inicializa a Matriz de Rigidez Global K

```

> K := Matrix(ndof, ndof, 0.0): M := Matrix(ndof, ndof, 0.0):

```

(1)

Monta a matriz de rigidez do elemento 1, partindo do canto (10,10)=(0,0)

```

> m := 0;
> for k from 1 to nelm do
  Ke := ES[1, k];
  Le := LJ[1, k];
  Is := LI[1, k];
  for i from 1 to 4 do
    for j from 1 to 4 do
      K[i + m, j + m] := K[i + m, j + m] + Ke[i, j];
      M[i + m, j + m] := M[i + m, j + m] + Me[i, j];
    end do;
  end do;
  m := m + 2;
end do;
>
> K: M

```

```

>  $\frac{K}{10000}$ ;

```

Entre Lista de Graus de Liberdade Fixos

Obs: MODIFICAR MANUALMENTE PARA MAIS DE DOIS ELEMENTOS

```

> fixos := [1, 2, 5, 6];

```

Elimina primeiro as linhas e depois as colunas e guarda a Matriz Reduzida em KRC

```

> KR := DeleteRow(K, fixos); KRC := DeleteColumn(KR, fixos);

```

Entre vetor de cargas (Força_i, Momento_i)

Obs: MODIFICAR MANUALMENTE PARA MAIS DE DOIS ELEMENTOS

```

> P := (-1000, 0);

```

Resolve Sistema Reduzido por inversão

```

> W := MatrixInverse(KRC).P;
>

```


APÊNDICE 3 – ANÁLISE MODAL

Este planilha calcula as frequências naturais e os modos de deslocamento de uma viga engastada em base na Teoria de Decomposição Modal

> restart;

Entrada de dados

> $m_1 := 0.175$; $m_2 := 0.263$; $m_3 := 0.350$;

> $k_1 := 105.0$; $k_2 := 2 \cdot 105$; $k_3 := 3 \cdot 105$;

$k_1 := 105.0$; $k_2 := 2 \cdot 105$; $k_3 := 3 \cdot 105$;

Construção das matrizes globais de Massa e de Rigidez

> $m := \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$;

> $k := \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$;

>

Cálculo dos autovalores e autovetores do problema dinâmico

> with(LinearAlgebra):

> $A := \text{MatrixInverse}(m) \cdot k$;

> $\lambda, \phi := \text{Eigenvectors}(A)$;

Cálculo das frequências naturais

> $\omega_1 := \sqrt{\text{Re}(\lambda[1])}$; $\omega_2 := \sqrt{\text{Re}(\lambda[2])}$; $\omega_3 := \sqrt{\text{Re}(\lambda[3])}$;

Normalização da Matriz de amplitudes

> $\phi_1, \phi_2, \phi_3 := \text{Column}(\text{Re}(\phi), [1, 2, 3])$;

Monta a matriz de rigidez do elemento 1, partindo do canto (10,10)=(0,0)

```

> m := 0;
> for k from 1 to nelm do
  Ke := ES[1, k];
  Le := LJ[1, k];
  Is := LI[1, k];
  for i from 1 to 4 do
    for j from 1 to 4 do
      K[i + m, j + m] := K[i + m, j + m] + Ke[i, j];
      M[i + m, j + m] := M[i + m, j + m] + Me[i, j];
    end do;
  end do;
  m := m + 2;
end do;
>
> K: M

```

```

>  $\frac{K}{10000}$ ;

```

Entre Lista de Graus de Liberdade Fixos

Obs: MODIFICAR MANUALMENTE PARA MAIS DE DOIS ELEMENTOS

```

> fixos := [1, 2, 5, 6];

```

Elimina primeira as linhas e depois as colunas e guarda a Matriz Reduzida em KRC

```

> KR := DeleteRow(K, fixos); KRC := DeleteColumn(KR, fixos);

```

Entre vetor de cargas (Força_i, Momento_i)

Obs: MODIFICAR MANUALMENTE PARA MAIS DE DOIS ELEMENTOS

```

> P := (-1000, 0);

```




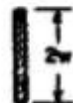
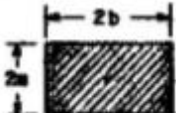



Resolve Sistema Reduzido por inversão

```

> W := MatrixInverse(KRC).P;
>

```

APÊNDICE-4

SEÇÃO TRANSVERSAL	FORMA DO CORPO	MASSA ADICIONAL POR UNIDADE DE COMPR. - Mod ↔ DIREÇÃO DE MOV																					
	CIRCULO ↔	$\rho \pi a^2$																					
	ELIPSE ↔	$\rho \pi b^2$																					
	ELIPSE ↔	$\rho \pi a^2$																					
	PLACA ↔	$\rho \pi w^2$																					
	RETANGULO ↔	<table><tr><th>a/b</th><th></th></tr><tr><td>∞</td><td>1.00 $\rho \pi a^2$</td></tr><tr><td>10</td><td>1.14 "</td></tr><tr><td>5</td><td>1.21 "</td></tr><tr><td>2</td><td>1.38 "</td></tr></table>	a/b		∞	1.00 $\rho \pi a^2$	10	1.14 "	5	1.21 "	2	1.38 "	<table><tr><th>a/b</th><th></th></tr><tr><td>1</td><td>1.51 $\rho \pi a^2$</td></tr><tr><td>0.5</td><td>1.70 "</td></tr><tr><td>0.2</td><td>1.98 "</td></tr><tr><td>0.1</td><td>2.23 "</td></tr></table>	a/b		1	1.51 $\rho \pi a^2$	0.5	1.70 "	0.2	1.98 "	0.1	2.23 "
a/b																							
∞	1.00 $\rho \pi a^2$																						
10	1.14 "																						
5	1.21 "																						
2	1.38 "																						
a/b																							
1	1.51 $\rho \pi a^2$																						
0.5	1.70 "																						
0.2	1.98 "																						
0.1	2.23 "																						
	LOSANGO ↔	<table><tr><td>2</td><td>0.85 "</td></tr><tr><td>1</td><td>0.78 "</td></tr><tr><td>0.5</td><td>0.67 "</td></tr><tr><td>0.2</td><td>0.61 "</td></tr></table>	2	0.85 "	1	0.78 "	0.5	0.67 "	0.2	0.61 "													
2	0.85 "																						
1	0.78 "																						
0.5	0.67 "																						
0.2	0.61 "																						
	PERFIL I a/c = 2.6 b/c = 3.6 ↔	$2.11 \rho \pi a^2$																					
 n Lados	POLIGONO REGULAR ↕ OU ↕	<table><tr><td>n = 3</td><td>0.654 $\rho \pi a^2$</td></tr><tr><td>4</td><td>0.787 "</td></tr><tr><td>5</td><td>0.823 "</td></tr><tr><td>6</td><td>0.867 "</td></tr><tr><td>∞</td><td>1.000 "</td></tr></table>		n = 3	0.654 $\rho \pi a^2$	4	0.787 "	5	0.823 "	6	0.867 "	∞	1.000 "										
n = 3	0.654 $\rho \pi a^2$																						
4	0.787 "																						
5	0.823 "																						
6	0.867 "																						
∞	1.000 "																						

